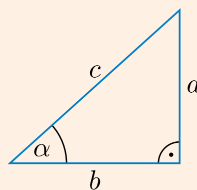


4 Trygonometria

Jedną z funkcji trygonometrycznych omawianych w tym rozdziale jest funkcja sinus – słowo to po łacinie oznacza zagięcie, zatokę. Jeśli znamy wartość sinusa kąta α (w skrócie $\sin\alpha$) oraz długość przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego, możemy obliczyć długość przyprostokątnej a (rysunek obok), korzystając z równości $a = c\sin\alpha$.



Na przykład, chcąc się dowiedzieć, na jaką wysokość sięgnie drabina strażacka o długości 40 m podniesiona pod kątem 65°, wykonujemy mnożenie $40 \cdot \sin 65°$. Ponieważ $\sin 65° \approx 0{,}9$, więc wysokość ta jest równa około 36 m.

Multi*teka*

- Jak duża jest Ziemia
- Geometria hiperboliczna
- Tunel na wyspie Samos
- Zjawisko paralaksy

Uczeń:
- podaje twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz wzory na długość przekątnej kwadratu i wysokość trójkąta równobocznego,
- stosuje twierdzenie Pitagorasa do wyznaczania długości odcinków w trójkątach prostokątnych,
- korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyprowadza zależności ogólne, np. dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego,
- przeprowadza dowód twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Komentarz
Warto polecić uczniom, aby zapisali równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o przyprostokątnych k i l oraz przeciwprostokątnej m – dzięki temu uczniowie oswoją się z innymi oznaczeniami.

Ćwiczenie 1
a) 50
b) 3
c) $3\sqrt{2}$
d) 4
e) 4
f) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

Multiteka
- Dowody twierdzenia Pitagorasa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.1

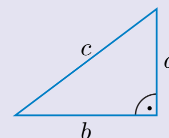
Generator testów i sprawdzianów

4.1. Trójkąty prostokątne

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia (patrz str. 213–214), tu korzystamy z własności podobieństwa trójkątów.

Dowód
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Prowadzimy w nim wysokość CD (rysunek poniżej). Na podstawie cechy podobieństwa KKK trójkąty: CBD, ACD i ABC są podobne.
Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy:

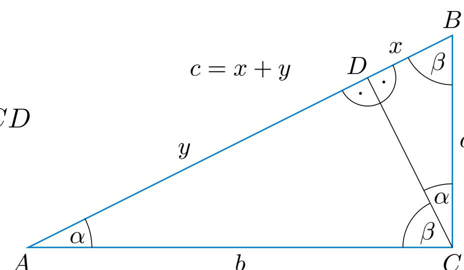
$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$$

$$a^2 = cx$$

Z podobieństwa trójkątów ABC i ACD otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

$$b^2 = cy$$

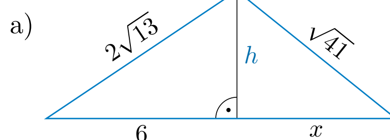


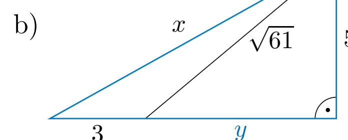
Zatem $a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y)$, ale $x + y = c$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.

Ćwiczenie 1
Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

a) $a = 30$, $b = 40$
b) $a = \sqrt{5}$, $b = 2$
c) $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = 2\sqrt{2} + 1$
d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$
e) $a = b = 2\sqrt{2}$
f) $a = \frac{1}{b} = 2$

Ćwiczenie 2
Oblicz x.

a)


b)


Ćwiczenie 2

a) $h^2 = (2\sqrt{13})^2 - 6^2$
$h^2 = (\sqrt{41})^2 - x^2$
$52 - 36 = 41 - x^2$
$x = 5$

b) $y^2 = (\sqrt{61})^2 - 5^2 = 36$
$y = 6$
$x^2 = (3 + y)^2 + 5^2 = 106$
$x = \sqrt{106}$

Aby sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny, można wykorzystać poniższe twierdzenie.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

> Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt T o bokach długości a, b, c takich, że $a^2 + b^2 = c^2$, oraz trójkąt prostokątny T_1 o przyprostokątnych długości a i b.
Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna c_1 trójkąta T_1 spełnia warunek $c_1^2 = a^2 + b^2$. Zatem $c_1 = c$.
Oznacza to, że trójkąty T i T_1 są przystające na podstawie cechy przystawania BBB. Zatem trójkąt T jest trójkątem prostokątnym.

Komentarz
Podczas wspólnej analizy dowodu warto polecić uczniom wykonanie odpowiednich rysunków pomocniczych.

Ćwiczenie 3

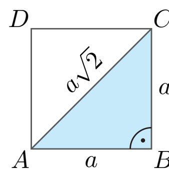
Sprawdź, czy trójkąt o danych bokach jest trójkątem prostokątnym.

a) 3, 4, 5 b) 5, 9, 11 c) 9, 40, 41 d) $\frac{9}{10}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$

Ćwiczenie 3
a), **c)**, **d)** jest
b) nie jest

Szczególne znaczenie mają dwa trójkąty prostokątne. Jeden z nich to trójkąt będący połową kwadratu, czyli trójkąt o kątach 45°, 45°, 90°.

> Przekątna kwadratu o boku długości a jest równa $a\sqrt{2}$.



Ćwiczenie 4

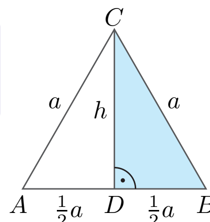
D a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego pole jest równe 72 cm^2.

Ćwiczenie 4
a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa: $d^2 = a^2 + a^2$, zatem $d = a\sqrt{2}$.
b) $12(2 + \sqrt{2})$ cm

Drugi ważny trójkąt prostokątny to trójkąt będący połową trójkąta równobocznego, czyli trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°.

> Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ćwiczenie 5

D a) Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 6 cm.

Ćwiczenie 5
a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa:
$$h^2 = a^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$
zatem $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) $12\sqrt{3}$ cm

Ćwiczenie 6

a) $2(\sqrt{2}+1)$
b) $6(\sqrt{2}+2)$
c) $8(\sqrt{2}+1)$

Ćwiczenie 7

a) $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$
b) $2(\sqrt{3}+3)$
c) $3(\sqrt{3}+1)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) Długości boków trójkąta: $a,\ a,\ a\sqrt{2}$

$$2a + a\sqrt{2} = 6(1+\sqrt{2})$$
$$a = 3\sqrt{2}$$

Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = 9$

b) Niech a będzie długością przyprostokątnej, wówczas:

$$a\sqrt{2} = a + 1 + \sqrt{2}$$
$$a = 3 + 2\sqrt{2}$$

Pole: $P = \frac{1}{2}a^2 = \frac{17}{2} + 6\sqrt{2}$

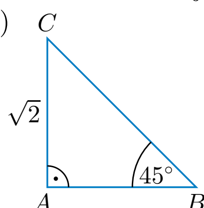
2. Jest to trójkąt o kątach ostrych 30° i 60°, stąd:
$x\sqrt{3} - x = 12 - 4\sqrt{3}$,
czyli $x = 4\sqrt{3}$.
Zatem $P = \frac{1}{2}x^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$.

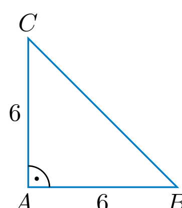
3. a) $h\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, czyli $h = 2\sqrt{2}$
$x = h = 2\sqrt{2}$
$y = x\sqrt{2} = 4$
b) $y = 4\sqrt{2}$
$x + 4 = 4\sqrt{3}$
$x = 4(\sqrt{3}-1)$

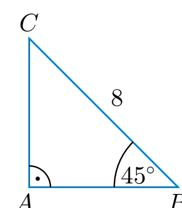
5. Długość krótszej przyprostokątnej: $6\sqrt{3}$
Niech $x, y > 0$ będą długościami środkowych. Wówczas:
$(6\sqrt{3})^2 + 9^2 = x^2$
$x = 3\sqrt{21}$
$(3\sqrt{3})^2 + 18^2 = y^2$
$y = 3\sqrt{39}$

Ćwiczenie 6

Oblicz obwód trójkąta ABC.

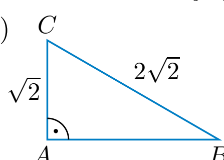
a) 

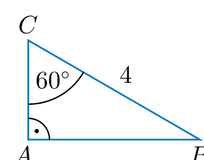
b) 

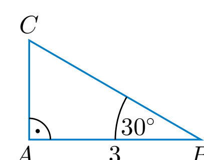
c) 

Ćwiczenie 7

Oblicz obwód trójkąta ABC.

a) 

b) 

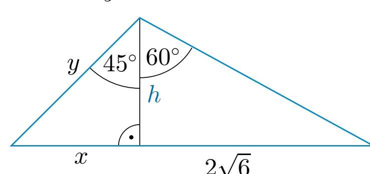
c) 

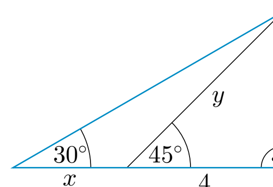
Zadania

1. Oblicz pole równoramiennego trójkąta prostokątnego, którego:
a) obwód jest równy $6(1+\sqrt{2})$,
b) przeciwprostokątna jest o $1+\sqrt{2}$ dłuższa od przyprostokątnej.

2. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie większy od drugiego kąta. Oblicz pole tego trójkąta, jeśli wiadomo, że różnica długości jego przyprostokątnych jest równa $12 - 4\sqrt{3}$.

3. Oblicz x i y.

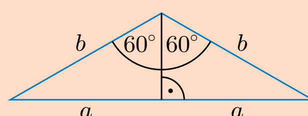
a) 

b) 

4. a) Najdłuższy bok trójkąta równoramiennego ma długość 15 cm, a jeden z jego kątów ma miarę 120°. Oblicz obwód tego trójkąta.
b) Kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 45°, a wysokość opuszczona na najdłuższy bok jest równa 3 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

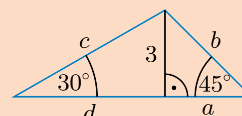
5. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 60°, a dłuższa przyprostokątna ma długość 18. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

4. a) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



$2a = 15$ cm oraz $a = b\frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem:
$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}a = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$$
$Ob = 2a + 2b = 5(3 + 2\sqrt{3})$ cm

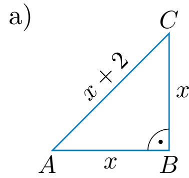
b) Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



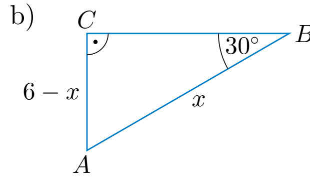
$a = 3$ cm, $b = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm,
$c = 2 \cdot 3 = 6$ [cm], $d = c\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm
$Ob = 3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

6. Oblicz obwód trójkąta ABC.

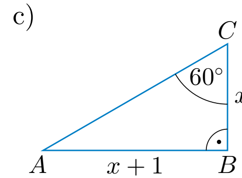
a)



b)



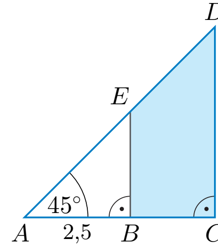
c)



7. a) Oblicz wysokość rombu o kącie ostrym 60° i obwodzie $32\sqrt{3}$ cm.

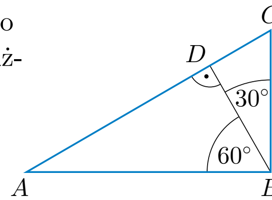
b) Oblicz obwód rombu o kącie ostrym 45° i wysokości $10\sqrt{2}$ cm.

8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AC| = |BC| = 4$ cm. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Oblicz wysokości trójkąta APC.



9. Oblicz obwód trójkąta ACD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że krótsza przekątna trapezu $BCDE$ ma długość równą $\frac{1}{2}\sqrt{41}$.

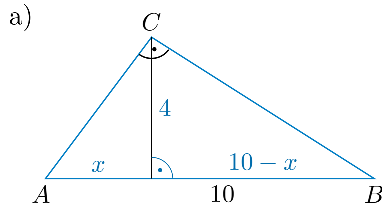
10. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ostrych jest dwa razy większy od drugiego kąta, a suma długości jego przeciwprostokątnej i dłuższej przyprostokątnej jest równa $2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$.



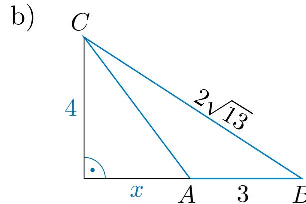
11. Oblicz obwód trójkąta ABD (rysunek obok), jeśli pole trójkąta BCD jest równe $3\sqrt{3}$.

12. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

a)



b)



13. a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

b) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę 60°, a jego przeciwprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.

6. a) $x + 2 = x\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2} + 2$

$Ob = 2\left(3\sqrt{2} + 4\right)$

b) $x = 2(6 - x)$

$x = 4$

$Ob = 2\left(\sqrt{3} + 3\right)$

c) $x + 1 = x\sqrt{3}$

$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$Ob = 2\sqrt{3} + 3$

7. a) 12 cm

b) 80 cm

8. $|PC| = 2$ cm

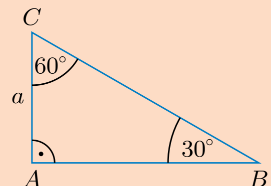
$|PA| = 2\sqrt{3}$ cm

$|PQ| = \sqrt{3}$ cm

9. $|BC| = \sqrt{|EC|^2 - |BE|^2} = 2$

$Ob = 4{,}5(2 + \sqrt{2})$

10. Jest to trójkąt o kątach ostrych 30° i 60°.



Jeżeli $|AC| = a$, to $|CB| = 2a$, $|AB| = a\sqrt{3}$.

Z warunków zadania:

$$a\sqrt{3} + 2a = 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$$

$$a = 2(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = 24(2\sqrt{3} - 3)$

11. $|BD| = |CD|\sqrt{3}$

$3\sqrt{3} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |CD| = \frac{|BD|^2}{2\sqrt{3}}$

$|BD| = 3\sqrt{2}$

$Ob = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} =$

$= 3\left(\sqrt{6} + 3\sqrt{2}\right)$

12. a) $|AC|^2 = x^2 + 16$

$|BC|^2 = (10 - x)^2 + 16$

$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

$x^2 - 10x + 16 = 0, \quad 0 < x < 5$

$x = 2$

$Ob = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 10 = 2(5 + 3\sqrt{5})$

b) $16 + (x + 3)^2 = 52, \quad x > 0$

$(x + 3)^2 = 36$

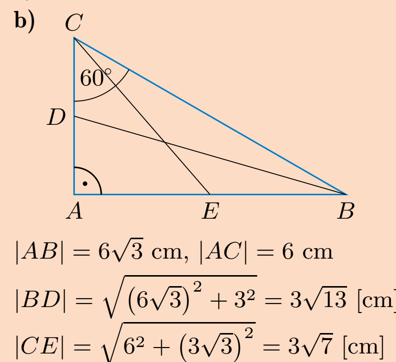
$x = 3$

$|AC| = 5$

$Ob = 8 + 2\sqrt{13} = 2(4 + \sqrt{13})$

13. a) $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm

b)



$|AB| = 6\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 6$ cm

$|BD| = \sqrt{\left(6\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 3\sqrt{13}$ [cm]

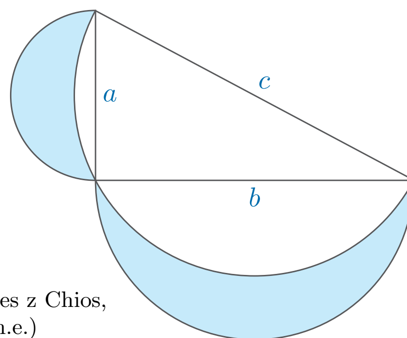
$|CE| = \sqrt{6^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = 3\sqrt{7}$ [cm]

14. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 30 cm, a jego najdłuższy bok ma długość 13 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

b) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 2 cm. Długość jednej z przyprostokątnych jest średnią arytmetyczną długości przeciwprostokątnej i drugiej przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta.

15. Obwód rombu jest równy $4\sqrt{41}$ cm, a jedna z jego przekątnych jest o 2 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długości tych przekątnych.

*** 16.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 8 cm i 15 cm. Boki trójkąta są średnicami półokręgów, które wyznaczają księżyce Hipokratesa (rysunek obok). Oblicz sumę pól tych księżyców i porównaj ją z polem trójkąta.



Księżyce Hipokratesa (Hipokrates z Chios, grecki matematyk z V wieku p.n.e.)

*** 17.** a) Z kwadratu o boku 1 odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny. Oblicz obwód tego ośmiokąta.

b) Z kwadratu odcięto na rogach trójkąty tak, że otrzymano ośmiokąt foremny o boku 1. Oblicz obwód tego kwadratu.

Czy wiesz, że…

Liczby naturalne a, b, c wyrażające długości boków trójkąta prostokątnego nazywamy **trójkami pitagorejskimi**. Są nimi na przykład:

3, 4, 5, bo $3^2 + 4^2 = 5^2$, również 6, 8, 10 czy 9, 12, 15

5, 12, 13, bo $5^2 + 12^2 = 13^2$, również 10, 24, 26

7, 24, 25, bo $7^2 + 24^2 = 25^2$, również 14, 48, 50

Wszystkie trójki pitagorejskie możemy otrzymać, korzystając ze wzorów:

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2, \quad \text{gdzie } x > y \text{ oraz } x, y \in \mathbf{N}_+$$

lub biorąc wielokrotności otrzymanych liczb.

D **18.** Wykaż, że jeśli a, b, c są określone powyższymi wzorami, to $a^2 + b^2 = c^2$. Korzystając z tych wzorów, znajdź trójki pitagorejskie dla:

a) $x = 4,\ y = 3$, b) $x = 5,\ y = 2$, c) $x = 6,\ y = 1$, d) $x = 3,\ y = 2$.

14. Niech $x, y > 0$ będą przyprostokątnymi trójkąta.

a) $x + y + 13 = 30$,
czyli $y = 17 - x$
$x^2 + (17 - x)^2 = 13^2$
$x = 5$ lub $x = 12$
Przyprostokątne trójkąta: 5 cm, 12 cm

b) $y = \frac{x+2}{2}$
$x^2 + \frac{(x+2)^2}{4} = 4$
$x = 1{,}2$
$y = 1{,}6$
$Ob = 4{,}8$ cm

15. x, $x+2$ – długości przekątnych rombu
Długość boku rombu: $\sqrt{41}$
$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = 41$
$x = 8$
Długości przekątnych: 8 cm, 10 cm

16. Suma pól półksiężyców:

$$P = P_\triangle + \tfrac{1}{2}\pi\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\pi\left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\pi\left(\tfrac{c}{2}\right)^2 =$$
$$= P_\triangle + \tfrac{1}{8}\pi\left(a^2 + b^2 - c^2\right) = P_\triangle = \tfrac{1}{2}ab = 60 \text{ cm}^2$$

Suma pól półksiężyców jest równa polu trójkąta.

17. a) Na rogach odcinamy trójkąty prostokątne równoramienne o ramieniu x, gdzie $0 < x < \frac{1}{2}$. Wtedy długość boku ośmiokąta możemy wyrazić na dwa sposoby:
$x\sqrt{2} = 1 - 2x$, czyli $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Wówczas bok ośmiokąta: $x\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$, a jego obwód: $8(\sqrt{2} - 1)$.

b) Na rogach odcinamy trójkąty prostokątne równoramienne o ramieniu x, gdzie $0 < x < \frac{1}{2}$. Wtedy $x\sqrt{2} = 1$, czyli $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Wówczas bok kwadratu: $2x + 1 = \sqrt{2} + 1$, a jego obwód: $4(\sqrt{2} + 1)$.

18. $a^2 + b^2 =$
$= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 =$
$= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 =$
$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 =$
$= (x^2 + y^2)^2 = c^2$

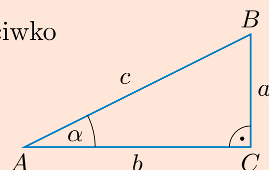
a) 7, 24, 25
b) 20, 21, 29
c) 12, 35, 37
d) 5, 12, 13

4.2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Stosunki długości boków trójkąta prostokątnego są tak powszechnie stosowane, że otrzymały własne nazwy.

Definicja

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** tego kąta.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej nazywamy **cosinusem** tego kąta.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie nazywamy **tangensem** tego kąta.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

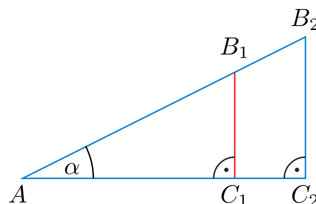
Stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta nazywamy **cotangensem** tego kąta.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Stosunki te nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi** kąta ostrego α.

Zwróć uwagę, że stosunki te nie zależą od wielkości rozpatrywanego trójkąta, a jedynie od kąta α. Z podobieństwa trójkątów: AB_1C_1, AB_2C_2 wynikają równości:

$$\sin\alpha = \frac{|B_1C_1|}{|AB_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|AB_2|}$$



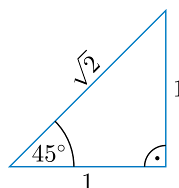
D **Ćwiczenie 1**

Uzasadnij, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha < 1 \quad \text{i} \quad \cos\alpha < 1$$

Przykład 1

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45°.



$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

Uczeń:
- podaje definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym,
- podaje wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45°, 60°,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w bardziej złożonych sytuacjach,
- uzasadnia proste zależności, korzystając z własności funkcji trygonometrycznych.

Komentarz

Warto polecić uczniom, aby zapisali definicje funkcji trygonometrycznych dla trójkąta o przyprostokątnych k i l oraz przeciwprostokątnej m – dzięki temu uczniowie oswoją się z innymi oznaczeniami.

Ćwiczenie 1

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ oraz

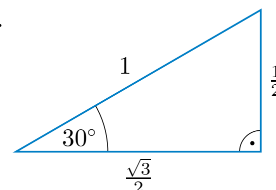
$a < c$ i $b < c$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} < \frac{c}{c} = 1$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} < \frac{c}{c} = 1$

Przykład 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 30°.



$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

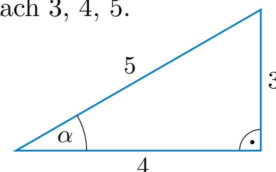
$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 2

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60°.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny o bokach 3, 4, 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.



$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3} = 1{,}(3)$

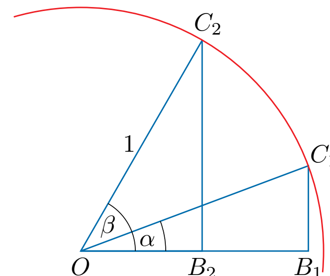
Ćwiczenie 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach a, b, c.

a) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ $\qquad$ b) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$ $\qquad$ c) $a = 1$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 3$

Dla kątów ostrych α i β z nierówności $\alpha < \beta$ wynika nierówność $\sin\alpha < \sin\beta$. Aby to uzasadnić, rozpatrzmy trójkąty OB_1C_1 i OB_2C_2 (rysunek obok). Punkty C_1 i C_2 leżą na łuku okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1.

Zauważ, że $\sin\alpha = |B_1C_1|$, $\sin\beta = |B_2C_2|$ oraz $|B_1C_1| < |B_2C_2|$, zatem $\sin\alpha < \sin\beta$.



D **Ćwiczenie 4**

Uzasadnij, że jeśli $\alpha < \beta < 90^\circ$, to $\cos\alpha > \cos\beta$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach długości:

a) 6, 8, 10, $\qquad$ c) 1, 4, $\sqrt{17}$, $\qquad$ e) $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5,

b) 7, 24, 25, $\qquad$ d) 1, 4, $\sqrt{15}$, $\qquad$ f) $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, 2.

Ćwiczenie 2

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Komentarz

Po tym ćwiczeniu warto zaproponować uczniom konkurs na odgadywanie miary kąta α. Nauczyciel podaje wartości funkcji trygonometrycznych, a uczniowie podają miary kątów. Wygrywa uczeń, który poda miarę kąta z największą dokładnością.

Ćwiczenie 3

a) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$

b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8}$

c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4

Zauważmy, że $\cos\alpha = |OB_1|$, $\cos\beta = |OB_2|$ oraz $|OB_1| > |OB_2|$, zatem $\cos\alpha > \cos\beta$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$

b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{24}{7}$

c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 4$

d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$

e) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2$

f) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$

2. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

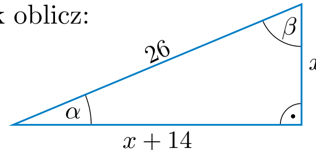
α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Czy wiesz, że…

Skrót *sin* pochodzi od łacińskiego słowa *sinus* – zagięcie, zatoka;
cos to skrót od *complementi sinus*, czyli sinus dopełnienia;
tg – skrót słowa *tangens* oznaczającego styczną.

3. Przekątna prostokąta o bokach długości 1 i 2 dzieli go na dwa trójkąty. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

4. Dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok oblicz:
a) długości przyprostokątnych,
b) wartości: $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$ oraz $\sin\beta, \cos\beta, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{ctg}\beta$.



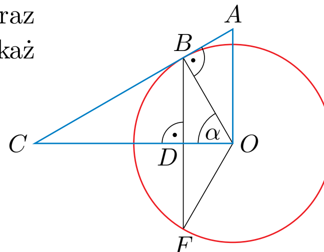
5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna jest trzy razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

6. Dany jest równoległobok (niebędący prostokątem) o bokach długości 9 i 10. Jedna z przekątnych dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty prostokątne. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych tych trójkątów.

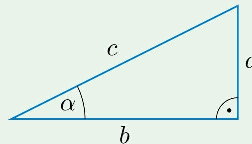
7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 6 i 10, a wysokość jest równa 5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między dłuższą podstawą trapezu a jego: a) przekątną, b) ramieniem.

8. Dane są okrąg o środku O i promieniu 1 oraz trójkąt prostokątny AOC (rysunek obok). Wskaż odcinek, którego długość jest równa:
a) $\sin\alpha$, b) $\cos\alpha$, c) $\operatorname{tg}\alpha$, d) $\operatorname{ctg}\alpha$.

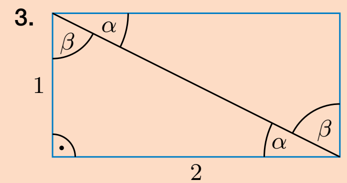
D **9.** Uzasadnij, że na rysunku obok:
a) $|CO| = \frac{1}{\cos\alpha}$, b) $|AO| = \frac{1}{\sin\alpha}$.



Rozpatruje się również funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:
- cosecans kąta α: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$
- secans kąta α: $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$



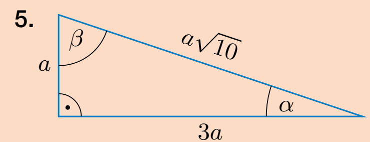
3.



Przekątna prostokąta ma długość $\sqrt{5}$.
$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 2$

4. a) Na mocy twierdzenia Pitagorasa:
$(x+14)^2 + x^2 = 26^2$
$x^2 + 14x - 240 = 0$
$\Delta = 1156$, $\sqrt{\Delta} = 34$
$x = \frac{-14-34}{2} < 0$ lub
$x = \frac{-14+34}{2} = 10$
Zatem długości przyprostokątnych wynoszą: 10, 24.
b) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$

5.



$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = 3$

6. $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{9}{10}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{19}}{10}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{9\sqrt{19}}{19}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{19}}{9}$

7. a) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{89}}{89}$, $\cos\alpha = \frac{8\sqrt{89}}{89}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{5}$
b) $\sin\beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{5}$

8. a) BD i DF **b)** DO **c)** BC **d)** AB

9. a) W trójkącie CBO: $\cos\alpha = \frac{|BO|}{|CO|} = \frac{1}{|CO|}$, czyli $|CO| = \frac{1}{\cos\alpha}$.
b) Zauważmy, że: $\sphericalangle BCO = 90^\circ - \alpha$, zatem $\sphericalangle CAO = \alpha$.
W trójkącie ABO: $\sin\alpha = \frac{|BO|}{|AO|} = \frac{1}{|AO|}$, czyli $|AO| = \frac{1}{\sin\alpha}$.

4.3. Trygonometria – zastosowania

Uczeń:
- odczytuje z tablic wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego lub miarę kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznej,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania zadań praktycznych.

Komentarz
Rozwiązując trójkąty prostokątne, korzystamy w tym podręczniku z tablic wartości funkcji trygonometrycznych umieszczonych na końcu. Jeżeli jest taka potrzeba, długości boków zaokrąglamy do dwóch miejsc po przecinku. Należy pamiętać, że przybliżone wyniki mogą się różnić w zależności od tego, czy w obliczeniach korzystamy z funkcji trygonometrycznych, czy z twierdzenia Pitagorasa.

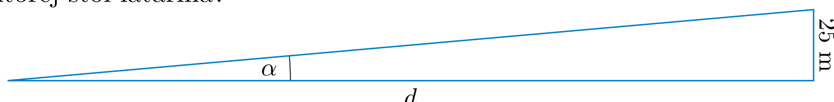
Ćwiczenie 1
h – wysokość budynku

a) $\frac{h}{5} = \operatorname{tg} 58^\circ \approx 1{,}6003$, czyli $h \approx 8$ m

b) $\frac{h}{12} = \operatorname{tg} 39^\circ \approx 0{,}8098$, czyli $h \approx 9{,}72$ m

Funkcje trygonometryczne wykorzystuje się w wielu sytuacjach praktycznych. Ich przybliżone wartości odczytamy z tablic wartości funkcji trygonometrycznych na str. 384. Możemy też skorzystać z odpowiedniego kalkulatora.

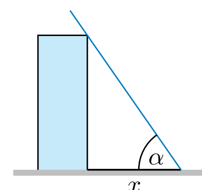
Przykład 1
Wierzchołek latarni morskiej znajduje się 25 m nad poziomem morza i widać go z jachtu pod kątem $\alpha = 5^\circ$. Jaka jest odległość jachtu od podnóża skarpy, na której stoi latarnia?



Do wyznaczenia szukanej wartości d wykorzystamy odczytaną z tablic przybliżoną wartość $\operatorname{tg} 5^\circ \approx 0{,}0875$.

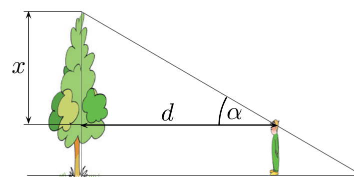
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{d}, \quad \text{czyli} \quad d = \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{25}{0{,}0875} \approx 286 \text{ [m]}$$

Ćwiczenie 1
Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość x w momencie, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt α.



a) $x = 5$ m, $\alpha = 58^\circ$ b) $x = 12$ m, $\alpha = 39^\circ$

Przykład 2
Obserwator widzi czubek drzewa odległego o $d = 65$ m pod kątem $\alpha = 29^\circ$ (oczy ma na wysokości 1,5 m nad ziemią). Jak wysokie jest drzewo?



$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{x}{65}$$

Z tablic odczytujemy: $\operatorname{tg} 29^\circ \approx 0{,}5543$, czyli $x \approx 65 \cdot 0{,}5543 \approx 36$ [m]. Wysokość drzewa jest więc równa około $36 + 1{,}5 = 37{,}5$ [m].

Ćwiczenie 2
Przyjmij jak w przykładzie 2., że obserwator ma oczy na wysokości 150 cm nad ziemią, i oblicz wysokość drzewa, jeśli:

a) $\alpha = 40^\circ$, $d = 22$ m,   b) $\alpha = 14^\circ$, $d = 100$ m.

Ćwiczenie 2
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku w przykładzie 2.

a) $\frac{x}{22} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0{,}8391$, czyli $x \approx 18{,}46$ m
Wysokość drzewa: $h \approx 18{,}46 + 1{,}5 = 19{,}96$ [m]

b) $\frac{x}{100} = \operatorname{tg} 14^\circ \approx 0{,}2493$, czyli $x \approx 24{,}93$ m
Wysokość drzewa: $h \approx 24{,}93 + 1{,}5 = 26{,}43$ [m]

Multiteka
- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie wysokości obiektów
- Zastosowanie trygonometrii – wyznaczanie położenia statku

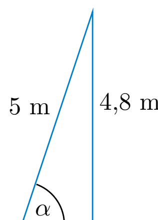
dlanauczyciela.pl | Kartkówka 4.3



Znajomość wartości funkcji trygonometrycznych może posłużyć do znajdowania miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Przykład 3

Drabinę długości 5 m oparto o ścianę budynku tak, że dotyka jej na wysokości 4,8 m. Jaki kąt tworzy drabina z ziemią?



$\sin\alpha = \frac{4{,}8}{5} = 0{,}96$. Z tabeli odczytujemy: $\alpha \approx 74^\circ$.

Ćwiczenie 3

Jaki kąt tworzy z ziemią drabina o długości:

a) 6,5 m, jeśli oparta o ścianę budynku sięga na wysokość 5,5 m,

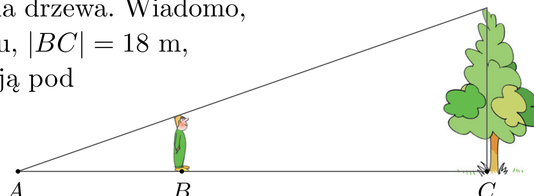
b) 4,5 m, jeśli jej koniec opierający się o ziemię jest odległy o 1 m od ściany budynku?

Zadania

1. Naciągnięty sznurek długości 20 m, na którego końcu zamocowany jest latawiec, tworzy z poziomem kąt 70°. Jak wysoko nad ziemią znajduje się latawiec?

2. O ile wyżej sięgnie sześciometrowa drabina ustawiona pod kątem 73° do poziomu ziemi od takiej samej drabiny ustawionej pod kątem 53°?

3. Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń ustawił się tak, że koniec jego cienia pokrywał się z końcem cienia drzewa. Wiadomo, że uczeń ma 180 cm wzrostu, $|BC| = 18$ m, a promienie słoneczne padają pod kątem 31° do powierzchni ziemi. Jaka jest wysokość drzewa?



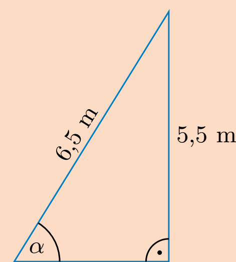
4. Drabina wozu strażackiego może być rozsunięta na długość 20 m i podniesiona pod kątem 72°. Na jaką wysokość sięgnie drabina, jeśli jest zamocowana 2,4 m nad ziemią?

5. a) Jaki kąt z powierzchnią ziemi tworzą promienie słoneczne, jeśli drzewo o wysokości 20 m rzuca cień długości 17 m?

b) Drabinę oparto o ścianę tak, że dotyka jej na wysokości 3,6 m i tworzy z ziemią kąt 54°. Jaki kąt będzie tworzyła z ziemią ta drabina, jeśli zostanie oparta o ścianę na wysokości 4 m?

Ćwiczenie 3

a)



$\sin\alpha = \frac{5{,}5}{6{,}5} \approx 0{,}8462$

$\alpha \approx 58^\circ$

b)

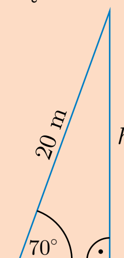


$\cos\alpha = \frac{1}{4{,}5} \approx 0{,}2222$

$\alpha \approx 77^\circ$

Odpowiedzi do zadań

1. Oznaczmy wysokość, na jakiej znajduje się latawiec, przez h.



$\frac{h}{20} = \sin 70^\circ$

$h \approx 20 \cdot 0{,}9397 \approx 18{,}79$ [m]

2. $6\sin 73^\circ - 6\sin 53^\circ \approx 0{,}95$ [m]

3. Oznaczmy wysokość drzewa przez h.

$\operatorname{ctg} 31^\circ = \frac{|AB|}{1{,}8}$

zatem:

$|AB| \approx 1{,}8 \cdot 1{,}6643 \approx 3$ [m]

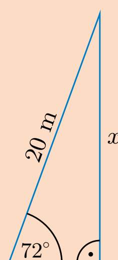
$|AC| \approx 3 + 18 = 21$ [m]

$\operatorname{tg} 31^\circ \approx \frac{h}{21}$

zatem:

$h \approx 21 \cdot 0{,}6009 \approx 12{,}62$ [m]

4.



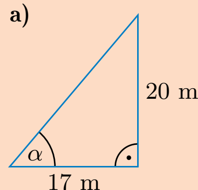
Oznaczmy wysokość, na jaką sięgnie drabina, przez h.

$\frac{x}{20} = \sin 72^\circ \approx 0{,}9511$

czyli $x \approx 19{,}02$ m.

Zatem $h \approx 19{,}02 + 2{,}4 = 21{,}42$ [m].

5. a)



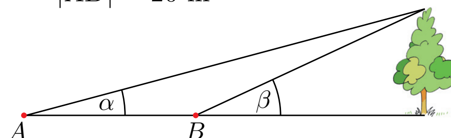
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{17} \approx 1{,}1765$

$\alpha \approx 50^\circ$

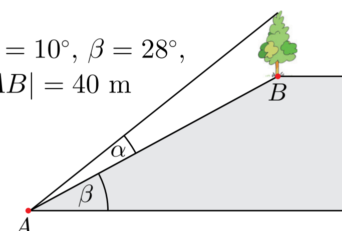
b) około 64°

6. Oblicz wysokość drzewa.

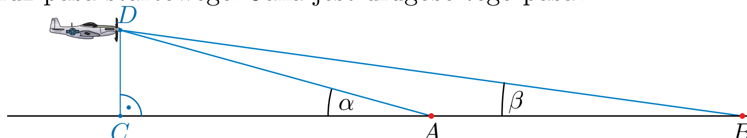
a) $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 25^\circ$, $|AB| = 20$ m



b) $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 28^\circ$, $|AB| = 40$ m



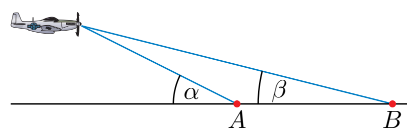
7. Pilot lecący samolotem na wysokości 50 m widzi początek pasa startowego pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a jego koniec pod kątem $\beta = 10^\circ$. Samolot nadlatuje wzdłuż pasa startowego. Jaka jest długość tego pasa?



8. Samolot zbliżający się do lotniska leci na wysokości 2400 m. Do lądowania musi schodzić pod kątem 4°. Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć ten manewr?

9. Startujący samolot wznosi się pod kątem 15° z prędkością 80 m/s. Jaką wysokość osiągnie samolot po 2 minutach od momentu oderwania się od ziemi?

10. Dwaj obserwatorzy stojący w punktach A i B (rysunek obok) w odległości 400 m od siebie widzą nadlatujący wzdłuż kierunku AB samolot pod kątami $\alpha = 20^\circ$ i $\beta = 8^\circ$. Na jakiej wysokości leci samolot?



11. a) Wierzchołek komina widać z punktu A pod kątem 26°, a z punktu B pod kątem 40°. Podstawa komina oraz punkty A i B leżą na jednej prostej. Komin ma wysokość 20 m. Jaka jest odległość między punktami A i B (pomiń grubość komina)? Rozpatrz dwa przypadki.

b) Wierzchołek komina jest widoczny z powierzchni ziemi pod kątem 42°, a po przejściu 50 m w kierunku komina – pod kątem 61°. Oblicz wysokość komina.

D **12.** Obserwator stojący na szczycie latarni morskiej na wysokości a metrów nad poziomem morza zobaczył pod kątem α do poziomu łódź płynącą w kierunku latarni. Po pewnym czasie znów spojrzał w tym kierunku i zobaczył tę samą łódź pod kątem β wciąż płynącą w kierunku latarni. Wykaż, że odległość, jaką łódź przepłynęła między kolejnymi obserwacjami, była równa $a(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)$.

---

6. **a)** około 12,59 m
b) około 8,81 m

7. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{50}{|CA|}$$

zatem:

$$|CA| \approx \frac{50}{0{,}5774} \approx 86{,}6$$

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{50}{|AB|+|CA|}$$

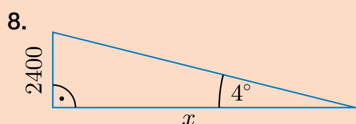
zatem:

$$|AB| + |CA| \approx \frac{50}{0{,}1763} \approx 283{,}6$$

$$|AB| \approx 283{,}6 - 86{,}6 = 197$$

Długość pasa startowego wynosi około 197 m.

8.



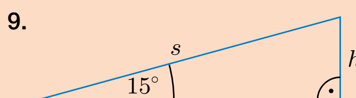
$$\operatorname{tg} 4^\circ = \frac{2400}{x}$$

zatem:

$$x \approx \frac{2400}{0{,}0699} \approx 34334{,}8$$

Powinien rozpocząć ten manewr około 34,33 km od początku pasa startowego.

9.



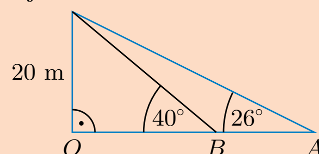
Obliczamy drogę, jaką pokona samolot: $v = \frac{s}{t}$, czyli
$s = 80 \cdot 120 = 9600$

Obliczamy wysokość, jaką osiągnie samolot:
$\frac{h}{s} = \sin 15^\circ \approx 0{,}2588$, czyli
$h \approx 2484{,}48$ m

10. około 91,53 m

11. **a)** Podstawę komina oznaczmy przez O.

1° Punkty A i B znajdują się po tej samej stronie komina.



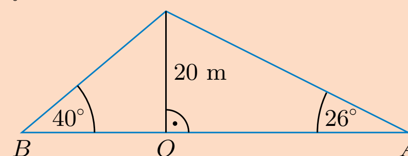
$\frac{20}{|OB|} = \operatorname{tg} 40^\circ \approx 0{,}8391$

zatem $|OB| \approx 23{,}84$ m

$\frac{20}{|OB|+|AB|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0{,}4877$

czyli $|AB| \approx 17{,}17$ m

2° Punkty A i B znajdują się po przeciwnych stronach komina.



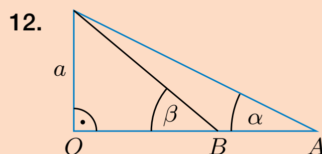
Jak w przypadku 1° mamy $|OB| \approx 23{,}84$ m.

$\frac{20}{|OA|} = \operatorname{tg} 26^\circ \approx 0{,}4877$, czyli $|OA| \approx 41$ m

Stąd $|AB| = |OA| + |OB| \approx 64{,}84$ m.

b) około 89,88 m

12.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$\frac{|AO|}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$, czyli
$|AO| = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

$\frac{|BO|}{a} = \operatorname{ctg}\beta$, czyli
$|BO| = a \cdot \operatorname{ctg}\beta$

$|AB| = |AO| - |BO| = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha + a \cdot \operatorname{ctg}\beta = a(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta)$,

co należało wykazać.

4.4. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości jego trzech boków i wyznaczenie miar jego trzech kątów.
Aby **rozwiązać trójkąt prostokątny**, wystarczy znać:

- długości dowolnych dwóch boków

lub

- długość dowolnego boku i miarę jednego z kątów ostrych.

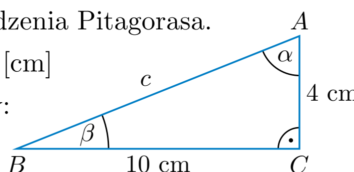
Przykład 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, mając dane długości jego przyprostokątnych: 4 cm i 10 cm.

Długość przeciwprostokątnej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$c = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \text{ [cm]}$$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Z tablic (str. 384) odczytujemy:
$\beta \approx 22^\circ$ i stąd $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 68^\circ$.



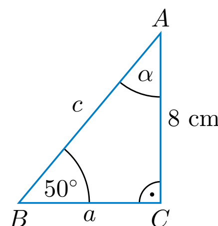
Przykład 2

Rozwiąż trójkąt prostokątny, którego przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta 50° ma długość 8 cm.

$\alpha = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\frac{8}{c} = \sin 50^\circ \approx 0{,}766$, stąd $c \approx 10{,}44$ cm.

$\frac{8}{a} = \operatorname{tg} 50^\circ \approx 1{,}1918$, stąd $a \approx 6{,}71$ cm.



Ćwiczenie 1

Rozwiąż trójkąt prostokątny, o którym wiadomo, że:

a) dwa jego dłuższe boki mają długości 9 cm i 10 cm,
b) długości przyprostokątnych są równe 5 cm i 13 cm,
c) przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jeden z kątów ma miarę 37°,
d) długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta 54° jest równa 8 cm.

Jeśli potrzebna jest większa dokładność, to miarę kąta możemy podawać w stopniach i minutach, a nawet w sekundach.

1 **minuta** (oznaczana $1'$) jest równa $\frac{1}{60}$ stopnia.
1 **sekunda** (oznaczana $1''$) jest równa $\frac{1}{60}$ minuty.
Na przykład $24{,}5^\circ = 24^\circ 30'$.

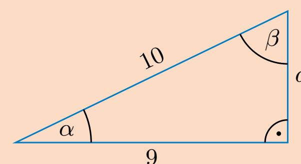
$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$
$1^\circ = 3600''$

Uczeń:

- rozwiązuje trójkąty prostokątne,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach i prostopadłościanach.

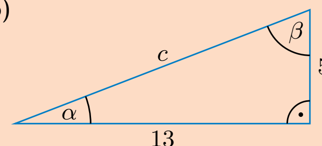
Ćwiczenie 1

a)



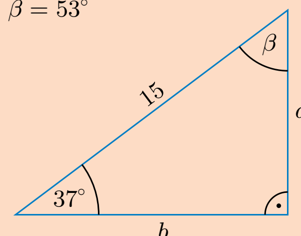
$a = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{19}$ [cm]
$\cos \alpha = \frac{9}{10}$, czyli $\alpha \approx 26^\circ$,
$\beta \approx 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$

b)



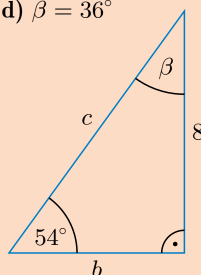
$c = \sqrt{5^2 + 13^2} = \sqrt{194}$ [cm]
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846$, czyli
$\alpha \approx 21^\circ$, $\beta \approx 90^\circ - 21^\circ = 69^\circ$

c) $\beta = 53^\circ$



$a = 15 \sin 37^\circ \approx 9{,}03$ [cm],
$b = 15 \sin 53^\circ \approx 11{,}98$ [cm]

d) $\beta = 36^\circ$



$c = \frac{8}{\sin 54^\circ} \approx 9{,}89$ [cm],
$b \approx \sqrt{(9{,}9)^2 - 8^2} = \sqrt{34{,}01} \approx 5{,}81$ [cm]

Ćwiczenie 2

a) $3°36'$ **b)** $2'24''$ **c)** $9'$

d) $7'12''$ **e)** $25'12''$

Ćwiczenie 3

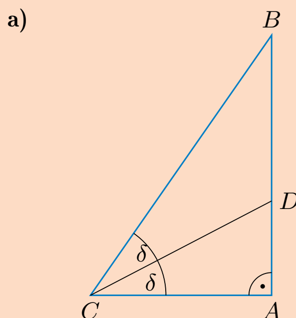
$\frac{|AB|}{10} = \sin 55° \approx 0{,}8192$,

czyli $|AB| \approx 8{,}192$

$\frac{|AC|}{10} = \cos 55° \approx 0{,}5736$,

czyli $|AC| \approx 5{,}736$

a)

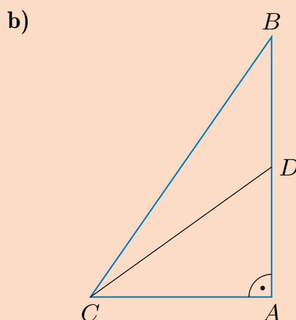


$\delta = 27{,}5°$, $\frac{|AC|}{|CD|} = \cos 27{,}5°$

$|CD| \approx \frac{5{,}736}{0{,}887} = 6{,}47$

Kąty: $27°30'$, $35°$, $117°30'$

b)



$|CD| =$

$= \sqrt{|AC|^2 + \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} \approx 7{,}05$

$\text{tg} \measuredangle ADC = \frac{|AC|}{\frac{1}{2}|AB|} \approx 1{,}4$

$\measuredangle ADC \approx 54°$,

czyli $\measuredangle BDC \approx 126°$

Kąty: $35°$, około $126°$, około $19°$

Przykład 3

Wyraź w minutach i sekundach $\frac{1}{1000}$ kąta $45°$.

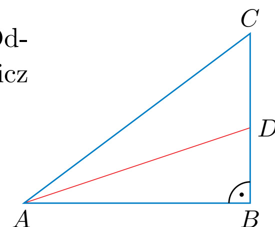
$$\frac{45°}{1000} = \frac{45}{1000} \cdot 3600'' = 162'' = 120'' + 42'' = 2'42''$$

Ćwiczenie 2

Wyraź w stopniach, minutach i sekundach $\frac{1}{100}$ kąta:

a) $360°$, b) $4°$, c) $15°$, d) $12°$, e) $42°$.

Przykład 4



Dany jest trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok). Odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta BAC. Oblicz miary kątów trójkąta ADC, jeśli $|AB| = 8$, $|BC| = 6$.

$$\text{tg} \measuredangle BAC = \frac{6}{8} = 0{,}75, \text{ czyli } \measuredangle BAC \approx 37°$$

Zatem: $\measuredangle CAD \approx \frac{1}{2} \cdot 37° = 18°30'$

$\measuredangle ACD \approx 90° - 37° = 53°$

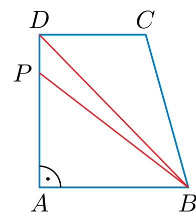
$\measuredangle ADC \approx 180° - 18°30' - 53° = 108°30'$

Ćwiczenie 3

W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku A kąt BCA ma miarę $55°$, a $|CB| = 10$. Oblicz długość odcinka CD oraz miary kątów trójkąta BCD, jeśli punkt D należy do boku AB oraz odcinek CD jest:

a) zawarty w dwusiecznej kąta BCA, b) środkową trójkąta ABC.

Zadania



1. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (rysunek obok) kąt ADB ma miarę $43°46'25''$, a kąt ABC – miarę $73°42'10''$.

a) Wyznacz miary kątów trójkąta BCD.

b) Wyznacz miary kątów trójkąta ABP, jeśli punkt P leży na dwusiecznej kąta ABC.

2. Rozwiąż trójkąt prostokątny o podanych długościach przyprostokątnych.

a) 4 cm, 6 cm b) 1 cm, 7 cm c) 8 cm, 10 cm

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli wiadomo, że:

a) $\measuredangle CAB = 34°$, $|CB| = 6$, b) $\measuredangle CBA = 66°$, $|AB| = 10$.

4. Oblicz obwód i pole trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 4 i kącie przy podstawie $37°$.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\measuredangle BCD = 106°17'50''$
$\measuredangle DBC = 27°28'35''$
$\measuredangle BDC = 46°13'35''$

b) $\measuredangle PAB = 90°$
$\measuredangle ABP = 36°51'5''$
$\measuredangle BPA = 53°8'55''$

2. a) $2\sqrt{13}$ cm, około: $34°$, $56°$

b) $5\sqrt{2}$ cm, około: $8°$, $82°$

c) $2\sqrt{41}$ cm, około: $39°$, $51°$

3. a) $\measuredangle ABC = 56°$
$|AC| = 6 \,\text{ctg}\, 34° \approx 8{,}9$
$|AB| = \frac{6}{\sin 34°} \approx 10{,}73$

b) $\measuredangle BAC = 24°$
$|AC| = 10 \sin 66° \approx 9{,}14$
$|BC| = 10 \cos 66° \approx 4{,}07$

4. Długość podstawy: $a = 2 \cdot 4 \cos 37° \approx 6{,}3888$

Wysokość: $h = 4 \sin 37° \approx 2{,}4072$

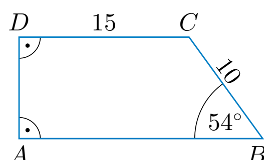
$Ob \approx 14{,}39$, $P \approx 7{,}69$

5. a) Trapez równoramienny ma podstawy długości 6 dm i 10 dm, a jego obwód jest równy 32 dm. Oblicz miary kątów tego trapezu.

b) Trapez równoramienny ma podstawy długości 4 cm i 8 cm oraz wysokość 8 cm. Oblicz miarę kąta, jaki przekątna trapezu tworzy z jego podstawą.

c) W trapezie równoramiennym przekątna o długości 13 cm tworzy z ramieniem kąt prosty. Oblicz miary kątów trapezu, jeśli jego wysokość jest równa 5 cm.

6. Oblicz długości boków AB i AD trapezu prostokątnego $ABCD$ oraz miarę kąta DCA (rysunek obok).

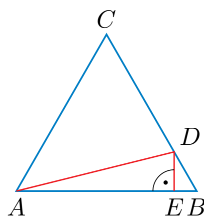


7. a) Przekątne deltoidu mają długości 20 cm i 30 cm. Punkt przecięcia przekątnych dzieli dłuższą z nich w stosunku 2 : 1. Oblicz miary kątów deltoidu.

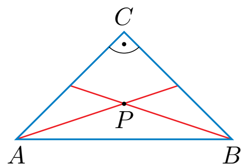
b) Obwód równoległoboku jest równy 90, a wysokość opuszczona na bok długości 30 jest równa 10. Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

8. Wyznacz kąty rombu, jeśli wysokość poprowadzona do jego boku podzieliła go w stosunku 1 : 3.

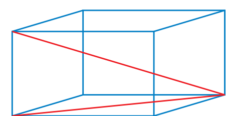
9. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 12 na boku CB obrano taki punkt D, że $3|DB| = |CD|$ (rysunek obok). Oblicz długość odcinka ED. Rozwiąż trójkąt ABD.



10. Środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC o ramieniu długości 6 cm przecinają się w punkcie P (rysunek obok). Rozwiąż trójkąt ABP.



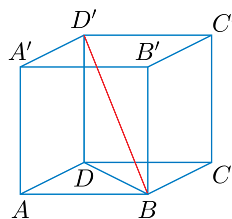
11. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy długości 1 i 3 oraz wysokości 2 (rysunek obok). Oblicz miarę kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.



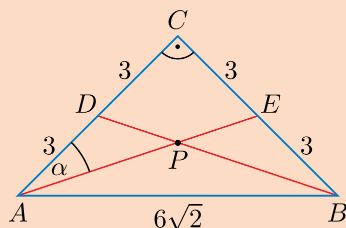
12. Dany jest sześcian o krawędzi a (rysunek obok). Wyznacz obwód i miary kątów ostrych trójkąta:

a) BDD',

b) $DD'O$, gdzie O jest środkiem odcinka BD.



10.

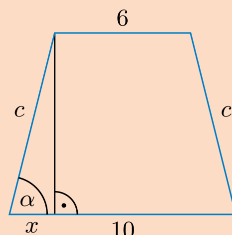


$|AE| = |BD| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ [cm],
$|AP| = |BP| = 2\sqrt{5}$ cm
Zatem boki trójkąta ABP mają długości: $2\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $6\sqrt{2}$ cm.
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$
zatem $\alpha \approx 26°30'$ i stąd:
$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA \approx 45° - 26°30' = 18°30'$$
Zatem kąty trójkąta ABP mają miary około: $18°30'$, $18°30'$, $143°$.

11. około 32°

12. **a)** $Ob = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})a$, kąty: około 35°, około 55°
b) $Ob = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{6})$, kąty: około 35°, około 55°

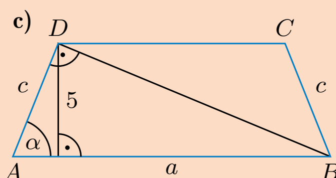
5. **a)**



Obliczamy długość ramienia c: $6 + 10 + 2c = 32$, zatem $c = 8$ dm.
$\cos\alpha = \frac{x}{c} = \frac{2}{8} = 0{,}25$,
zatem $\alpha \approx 75°30'$.
Drugi kąt trapezu ma miarę około: $180° - 75°30' = 104°30'$.

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{6} \approx 1{,}333$, $\alpha \approx 53°$

c)



$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5a = \frac{1}{2} \cdot 13c$$
czyli $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} = \cos\alpha$,
zatem $\alpha \approx 67°$.
Drugi kąt trapezu ma miarę około: $180° - 67° = 113°$.

6. $|AB| \approx 20{,}88$, $|AD| \approx 8{,}09$, $\sphericalangle DCA \approx 28°$

7. **a)** 90°, około 53°, około 108°30′, około 108°30′
b) około: 42°, 138°

8. około: 75°30′, 104°30′ lub około: 41°, 139°

9. Niech $\alpha = \sphericalangle DAE$, $|BD| = 3$.
$$\sin\sphericalangle DBE = \frac{|ED|}{|BD|}$$
czyli $|ED| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
$$|EB| = 3\sin 30° = \frac{3}{2}$$
czyli $|AE| = 10\frac{1}{2}$.
Wówczas:
$$|AD|^2 = \left(10\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (3\sqrt{13})^2$$
$|AD| = 3\sqrt{13}$
Zatem boki trójkąta ABD mają długości: 12, 3, $3\sqrt{13}$.
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{10\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0{,}2474$$
czyli $\alpha \approx 14°$.
Zatem kąty trójkąta ABD mają miary: 60°, około 14°, około 106°.

Uczeń:
- podaje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta oraz między funkcjami trygonometrycznymi kątów α i $90^\circ - \alpha$,
- wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich,
- sprawdza, czy istnieje kąt ostry spełniający podane zależności,
- stosuje poznane związki do upraszczania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne,
- uzasadnia związki między funkcjami trygonometrycznymi.

4.5. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których jest określona.

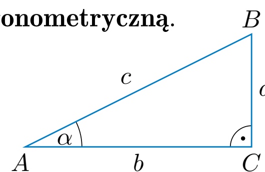
Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są poniższe zależności.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Uwaga. Zapis $\sin^2\alpha$ oznacza $(\sin\alpha)^2$, analogicznie $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$.

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy **jedynką trygonometryczną**.



Dowód jedynki trygonometrycznej

Przy oznaczeniach takich, jak na rysunku obok:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Zauważ, że w przedstawionym dowodzie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Ćwiczenie 1

D

Udowodnij tożsamość trygonometryczną.

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Ćwiczenie 1

a) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

b) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$

c) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej, to – korzystając z tożsamości podanych w ramce – można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1

Oblicz $\cos\alpha$, jeśli $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz α jest kątem ostrym.

Wartość $\cos\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Przykład 2

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Wartość $\sin\alpha$ obliczymy, korzystając z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2\alpha + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$
$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego są dodatnie.

Obliczamy wartości $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ćwiczenie 2

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

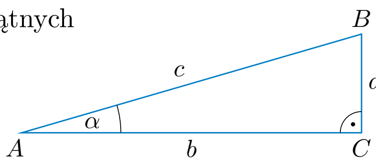
a) $\sin\alpha = 0{,}8$, b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, c) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, d) $\sin\alpha = \frac{1}{17}$.

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych, możemy wykorzystać odpowiedni trójkąt prostokątny.

Przykład 3

Oblicz: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$ oraz α jest kątem ostrym.

Rysujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a = 7$ i $b = 24$. Długość przeciwprostokątnej obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:



$$c = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Zatem:

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{24}{7}$$

Ćwiczenie 3

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$, d) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4

Narysuj odpowiedni trójkąt prostokątny i oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, d) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

Ćwiczenie 2

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$

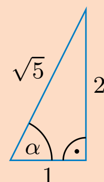
b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$

d) $\cos\alpha = \frac{12\sqrt{2}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 12\sqrt{2}$

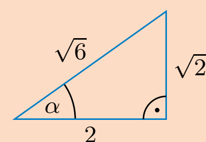
Ćwiczenie 3

a)



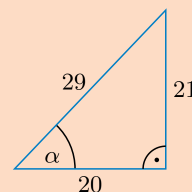
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$

b)



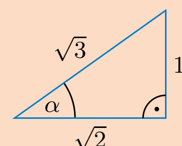
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$

c)



$\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{20}{21}$

d)



$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 4

a) Trójkąt o bokach długości: 2, $\sqrt{5}$, 3

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, 3

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{2}$

c) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$

d) Trójkąt o bokach długości: $\sqrt{11}$, 5, 6

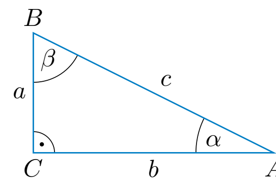
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC (rysunek obok).

W tym trójkącie $\beta = 90^\circ - \alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$$

i jednocześnie $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, zatem $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.



Twierdzenie

Dla dowolnego kąta ostrego α zachodzą równości:

1. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
4. $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

D **Ćwiczenie 5**

Uzasadnij podane wyżej tożsamości trygonometryczne: 2., 3. i 4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{10}$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$.

Zadania

1. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\cos\alpha = 0{,}8$, c) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, e) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$, g) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{5}$,

b) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, d) $\sin\alpha = 0{,}4$, f) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, h) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{5}$.

2. a) Oblicz sinus kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że jest on trzy razy większy od cosinusa tego kąta.

b) Oblicz cosinus kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że jest on dwa razy większy od sinusa tego kąta.

3. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$

4. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli wiadomo, że α jest jednym z kątów ostrych tego trójkąta oraz:

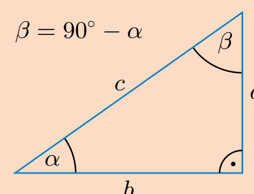
a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 10 cm,

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, a długość przeciwprostokątnej równa jest 39 cm.

Ćwiczenie 5

Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznych:

2. $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha$
3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$
4. $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$



a) $\cos\alpha = \frac{3}{10}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{91}}{91}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$

b) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$

c) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$

d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$

e) $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{13}}{6}$

f) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$

g) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$

h) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$

2. a) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

b) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. a) tak

$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$

b) nie

$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{6} \neq \frac{2\sqrt{6}}{5}$

c) nie

$\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3} \neq \frac{4}{5}$

d) tak

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} =$
$= \sqrt{5} + 2$

4. a) $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm

b) $6\sqrt{13}$ cm, $9\sqrt{13}$ cm

5. Czy istnieje kąt ostry α spełniający podane zależności?

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$

b) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\dfrac{6\sin\alpha - 8\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

b) $\dfrac{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}{1 - \sin^2\alpha}$

7. Kąt α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = m$. Wyznacz wartość wyrażenia.

a) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$

b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)$

c) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$

d) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$

D **8.** Uzasadnij tożsamość podaną w ramce obok. Korzystając z niej, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

D **9.** Uzasadnij tożsamość podaną w ramce obok. Korzystając z niej, oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$, b) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{20}{21}$.

10. Kąt α jest kątem ostrym i $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}4$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $\sin\alpha - \cos\alpha$ c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$

D **11.** Wykaż, że dla kąta ostrego α podana równość jest tożsamością.

a) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \sin^2\alpha$

b) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha) = \cos^2\alpha$

c) $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$

d) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

e) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

f) $\dfrac{\sin^4\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^4\alpha - \cos^2\alpha} = 1$

Czy wiesz, że…

Do oznaczania kątów zwykle używamy liter alfabetu greckiego.

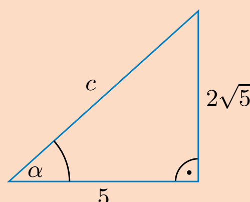
A α alfa	H η eta	N ν ni	T τ tau
B β beta	Θ θ teta	Ξ ξ ksi	Υ υ ypsilon
Γ γ gamma	I ι jota	O o omikron	Φ ϕ fi
Δ δ delta	K κ kappa	Π π pi	X χ chi
E ε epsilon	Λ λ lambda	P ρ ro	Ψ ψ psi
Z ζ dzeta	M μ mi	Σ σ sigma	Ω ω omega

6.
$c = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

a) $\frac{6\sin\alpha - 8\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{6}{\sin\alpha} - 8\operatorname{ctg}^2\alpha = -1$

b) $\frac{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha} = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = \frac{5}{9}$



10. a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$1{,}4^2 = 1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0{,}48$

b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$
$\sin\alpha - \cos\alpha = -0{,}2$ lub $\sin\alpha - \cos\alpha = 0{,}2$

c) $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha)$
$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = -0{,}296$ lub $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = 0{,}296$

5. a) tak **b)** nie **c)** tak **d)** tak

7. a) m^2 **b)** $1 - 2m^2$
c) $1 + 2m\sqrt{1 - m^2}$
d) $m + \sqrt{1 - m^2}$

8. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$

b) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

9. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

a) $\sin\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 7$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

c) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$

11. a) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

b) $(1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

c) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$

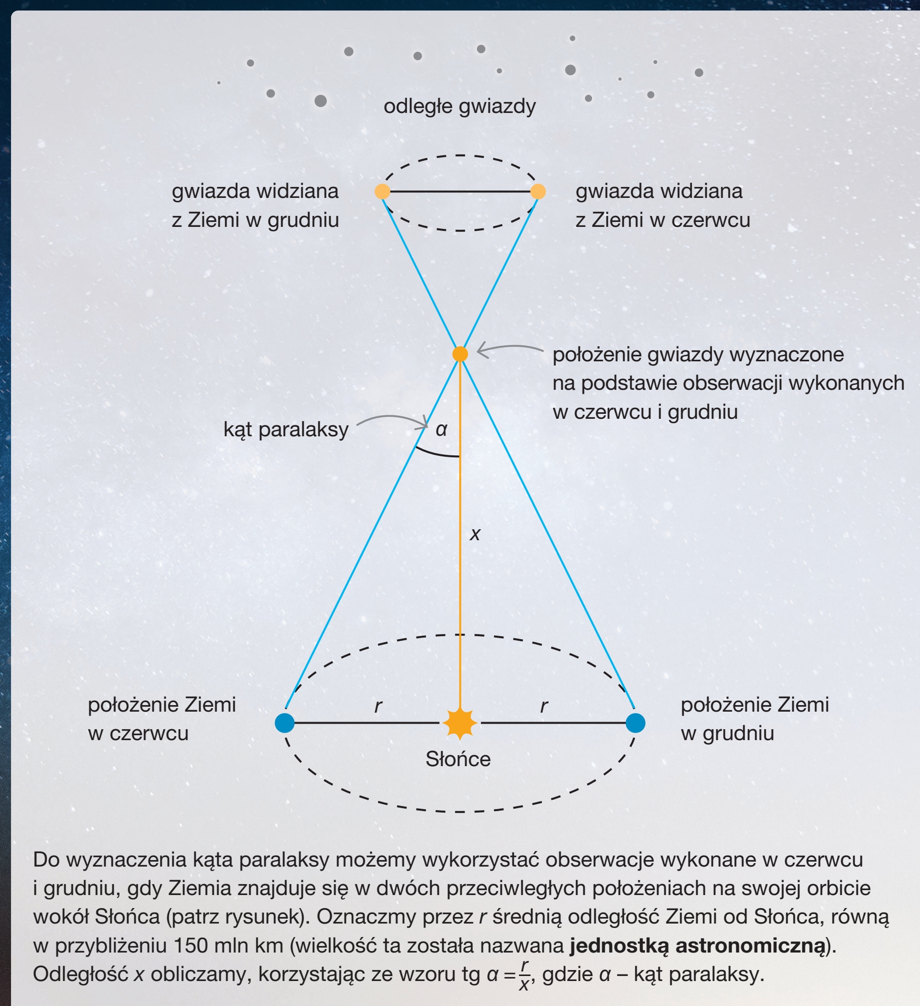
d) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

e) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

f) $\frac{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)} = \frac{\sin^2\alpha(-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha(-\sin^2\alpha)} = 1$

Trygonometria i astronomia

Odległości dzielące nas od stosunkowo bliskich gwiazd można obliczyć na podstawie obserwacji zmiany ich położenia na tle odległych gwiazd. Astronomowie w tym celu wyznaczają kąt, zwany kątem paralaksy. Ma on miarę rzędu setnych części sekundy.



Do wyznaczenia kąta paralaksy możemy wykorzystać obserwacje wykonane w czerwcu i grudniu, gdy Ziemia znajduje się w dwóch przeciwległych położeniach na swojej orbicie wokół Słońca (patrz rysunek). Oznaczmy przez r średnią odległość Ziemi od Słońca, równą w przybliżeniu 150 mln km (wielkość ta została nazwana **jednostką astronomiczną**). Odległość x obliczamy, korzystając ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{x}$, gdzie α – kąt paralaksy.

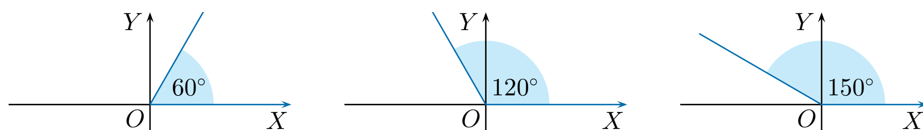
1 Oblicz odległość od Słońca najbliższej nam gwiazdy spoza Układu Słonecznego – Proximy Centauri, dla której kąt paralaksy $\alpha = 0{,}77''$. Przyjmij $\operatorname{tg} 0{,}77'' \approx 0{,}00000373$.

$$x = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{150\,000\,000}{0{,}00000373} \approx$$
$$\approx 40\,214\,477\,211\,796 \text{ [km]}$$

4.6. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

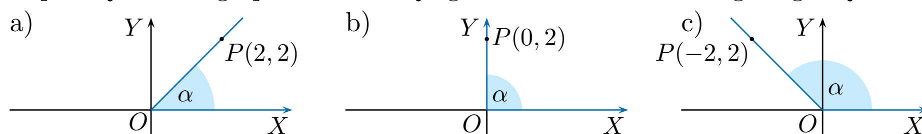
W tej i kolejnych lekcjach będziemy rozpatrywać kąty umieszczone w układzie współrzędnych w ten sposób, że początek układu jest wierzchołkiem kąta, a jedno z ramion kąta, zwane jego **ramieniem początkowym**, zawiera się w dodatniej półosi OX. Drugie ramię będziemy nazywać **ramieniem końcowym**. Kąt odłożony jest od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Figurę nazwamy **wypukłą**, gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty należące do tej figury jest w niej zawarty. W tym rozdziale rozpatrujemy kąty **wypukłe**, których miary należą do przedziału $\langle 0°; 180° \rangle$. Przypominamy, że kąt nazywamy **rozwartym**, gdy jego miara należy do przedziału $(90°; 180°)$.



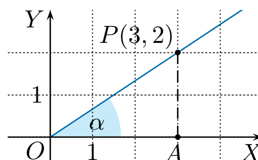
Ćwiczenie 1

Jaka jest miara kąta, do którego ramienia końcowego należy punkt P? Podaj współrzędne innego punktu należącego do ramienia końcowego tego kąta.



Przykład 1

Dany jest trójkąt POA, gdzie $P(3,2)$ i $A(3,0)$. Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA.



Rysujemy trójkąt prostokątny POA (rysunek obok). Oznaczmy miarę kąta POA przez α.

Ponieważ $|OA| = 3$, $|AP| = 2$, z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$|OP| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Zatem $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 2

Oblicz długość odcinka OP i wartości funkcji trygonometrycznych kąta POA.

a) $P(3,4)$, $A(3,0)$ b) $P(6,8)$, $A(6,0)$ c) $P(\sqrt{3},1)$, $A(\sqrt{3},0)$

Ćwiczenie 2

a) $|OP| = 5$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$

b) $|OP| = 10$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$

c) $|OP| = 2$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

Uczeń:

- określa znak funkcji trygonometrycznej kąta rozwartego,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na jego końcowym ramieniu; przedstawia ten kąt na rysunku,
- stosuje wzory:
  $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,
  $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$,
  $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$,
  $\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
  do obliczania wartości wyrażenia,
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych,
- zaznacza w układzie współrzędnych kąt, gdy dana jest wartość jego funkcji trygonometrycznej.

Ćwiczenie 1

a) $45°$, np. $(1,1)$
b) $90°$, np. $(0,1)$
c) $135°$, np. $(-1,1)$

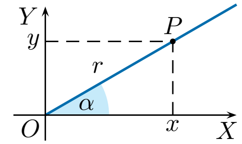
Multiteka

- Wzory redukcyjne
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (1)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (2)
- Funkcje trygonometryczne kąta w układzie współrzędnych (3)

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta ostrego α. Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$



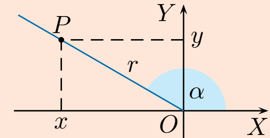
Podane wyżej wzory służą również do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$.

Niech $P(x, y)$ będzie dowolnym punktem, różnym od początku układu współrzędnych, leżącym na ramieniu końcowym kąta $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$. Wtedy:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\quad$ gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

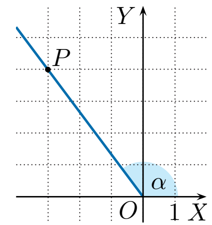
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad (x \neq 0$, czyli $\alpha \neq 90°)$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $\quad (y \neq 0$, czyli $\alpha \neq 0°$ i $\alpha \neq 180°)$.



Przykład 2

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt $P(-3, 4)$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.



$$\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{y}{x} = -\tfrac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \tfrac{x}{y} = -\tfrac{3}{4}$$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, zatem $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Ćwiczenie 3

Do ramienia końcowego kąta α należą punkty P i Q. Przedstaw ten kąt na rysunku i oblicz wartości jego funkcji trygonometrycznych, korzystając ze współrzędnych wybranego punktu.

a) $P(-4, 3)$, $Q(-8, 6)$ $\qquad$ b) $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $Q(-2, 6)$

Dla $\alpha \in (0°; 90°)$ zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha > 0, \quad \cos\alpha > 0, \quad \operatorname{tg}\alpha > 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha > 0$$

Dla $\alpha \in (90°; 180°)$ zachodzą nierówności:

$$\sin\alpha > 0, \quad \cos\alpha < 0, \quad \operatorname{tg}\alpha < 0, \quad \operatorname{ctg}\alpha < 0$$

Ćwiczenie 4

Wybierz dowolny punkt na ramieniu końcowym kąta α i oblicz wartości tych funkcji trygonometrycznych kąta α, które są dla niego określone.

a) $\alpha = 0°$ $\qquad$ b) $\alpha = 90°$ $\qquad$ c) $\alpha = 180°$

Ćwiczenie 3

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$

b) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$

Komentarz

Należy polecić uczniom, aby wykonali ćwiczenie 4.

Ćwiczenie 4

a) $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$

b) $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$

c) $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$

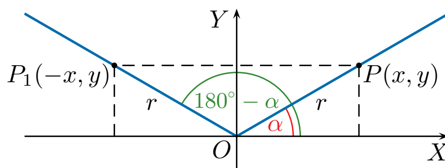
Rozpatrzmy punkt $P(x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta α oraz punkt $P_1(-x, y)$ należący do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$ (rysunek poniżej). Zauważmy, że $|OP_1| = |OP| = r$, zatem:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{-x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha$



Przykład 3

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$, jeżeli punkt $P(4, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt $P_1(-4, 3)$ – do ramienia końcowego kąta $180^\circ - \alpha$.

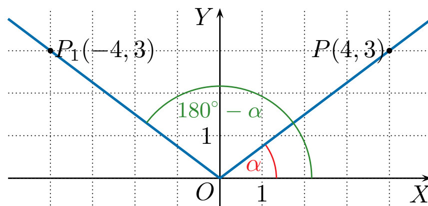
$|OP_1| = |OP| = 5$, zatem:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\quad \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{3}$



Ćwiczenie 5

Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt $P(4, 2)$, oraz kąt $180^\circ - \alpha$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i $180^\circ - \alpha$.

> Dla $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ zachodzą wzory:
>
> $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$
>
> $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 0^\circ$ i $\alpha \neq 180^\circ$

Przykład 4

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

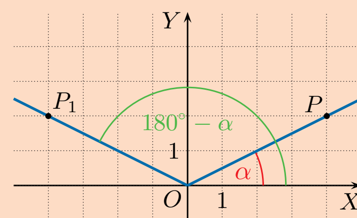
$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\operatorname{ctg} 120^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{ctg} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 5

$P(4, 2)$, $P_1(-4, 2)$



$r = 2\sqrt{5}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

$\operatorname{ctg}\alpha = 2$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -2$

Ćwiczenie 6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta: a) $\alpha = 135^\circ$, b) $\alpha = 150^\circ$.

> Dla $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ prawdziwe są zależności:
>
> $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
>
> $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdzie $\alpha \neq 0^\circ,\ 180^\circ$
>
> $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ$
>
> $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, gdzie $\alpha \neq 0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ$

D Ćwiczenie 7

Uzasadnij podane wyżej twierdzenie.

Przykład 5

Oblicz $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos^2\alpha = \tfrac{15}{16},\ \text{stąd}\ \cos\alpha = \tfrac{\sqrt{15}}{4}\ \text{lub}\ \cos\alpha = -\tfrac{\sqrt{15}}{4}$$

Dla $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ cosinus jest ujemny, więc ostatecznie $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ćwiczenie 8

Oblicz $\cos^2\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 9

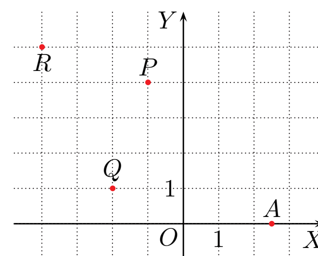
Oblicz $\sin^2\alpha$ i $\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz:

a) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Zadania

1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych podanego kąta (rysunek obok).

a) $\sphericalangle AOP$ b) $\sphericalangle AOQ$ c) $\sphericalangle AOR$



2. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\sin\alpha - \sin\beta$.

a) $P(-2,4)$, $Q(4,2)$ b) $P(-9,3)$, $Q(2,6)$

3. Punkt P należy do ramienia końcowego kąta α, a punkt Q – do ramienia końcowego kąta β. Oblicz $\cos\alpha + \cos\beta$.

a) $P(3,1)$, $Q(-1,\frac{1}{2})$ b) $P(-2,4)$, $Q(-4,2)$ c) $P(-2,\sqrt{2})$, $Q(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

Ćwiczenie 6

a) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, $\operatorname{ctg} 135^\circ = -1$

b) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}$

Ćwiczenie 7

Niech punkt $P(x,y)$ leży na ramieniu końcowym wypukłego kąta α oraz $x^2 + y^2 = r^2$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Ćwiczenie 8

a) $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

b) $\cos^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 9

a) $\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

b) $\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) $\sin^2\alpha = \frac{9}{10}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\sin\sphericalangle AOP = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\cos\sphericalangle AOP = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg}\sphericalangle AOP = -4$,
$\operatorname{ctg}\sphericalangle AOP = -\frac{1}{4}$

b) $\sin\sphericalangle AOQ = \frac{\sqrt{5}}{5}$,
$\cos\sphericalangle AOQ = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\sphericalangle AOQ = -\frac{1}{2}$,
$\operatorname{ctg}\sphericalangle AOQ = -2$

c) $\sin\sphericalangle AOR = \frac{5\sqrt{41}}{41}$,
$\cos\sphericalangle AOR = -\frac{4\sqrt{41}}{41}$,
$\operatorname{tg}\sphericalangle AOR = -\frac{5}{4}$,
$\operatorname{ctg}\sphericalangle AOR = -\frac{4}{5}$

2. a) $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$

3. a) $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10} + (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = \frac{3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{10}$

b) $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} + (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

4. Oblicz.

a) $\sin 120° + \sin 60°$ b) $\sin 135° \cdot \sin 150°$ c) $4\cos 150° - 3\operatorname{tg} 135°$

5. Oblicz.

a) $\frac{\sin 120° - \cos 150°}{3\operatorname{tg} 150°}$ c) $\frac{\operatorname{tg} 150° - \operatorname{tg} 120°}{\cos 120°}$ e) $\frac{\cos 135° + \cos 150°}{\sin 120° + \sin 135°}$

b) $\frac{\operatorname{tg} 120° - \cos 30°}{\sin 120°}$ d) $\frac{\operatorname{tg} 135° + \cos 45°}{\sin 45° \cdot \cos 135°}$ f) $\frac{\operatorname{tg} 120° - \cos 30°}{\cos 150° + \cos 60°}$

6. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (str. 384), oblicz przybliżone wartości $\sin 125°$ i $\cos 168°$.
>
> $\sin 125° = \sin(180° - 55°) = \sin 55° \approx 0{,}8192$
>
> $\cos 168° = \cos(180° - 12°) = -\cos 12° \approx -0{,}9781$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sin 105°$, b) $\sin 165°$, c) $\cos 130°$, d) $\cos 175°$, e) $\operatorname{tg} 142°$, f) $\operatorname{tg} 163°$.

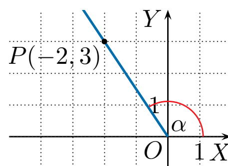
7. Oblicz: $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli α jest kątem rozwartym oraz:

a) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. Oblicz: $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli α jest kątem rozwartym oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, b) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

9. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Narysuj w układzie współrzędnych kąt $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$, taki że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$. Oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.
>
> Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, więc np. punkt $P(-2, 3)$ należy do ramienia końcowego kąta α. Zaznaczamy ten punkt w układzie współrzędnych i rysujemy ramię końcowe kąta α.
>
> $r = |OP| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,
>
> stąd $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
>
> $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.
>
> 
>

Narysuj w układzie współrzędnych odpowiedni kąt $\alpha \in \langle 0°; 180° \rangle$ oraz oblicz $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, jeśli:

a) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

4. a) $\sqrt{3}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
c) $3 - 2\sqrt{3}$

5. a) $\frac{\sin 60° + \cos 30°}{-3\operatorname{tg} 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = -1$

b) $\frac{-\operatorname{tg} 60° - \cos 30°}{\sin 60°} = \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -3$

c) $\frac{-\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 60°}{-\cos 60°} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$

d) $\frac{-\operatorname{tg} 45° + \cos 45°}{\sin 45° \cdot (-\cos 45°)} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2 - \sqrt{2}$

e) $\frac{-\cos 45° - \cos 30°}{\sin 60° + \sin 45°} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

f) $\frac{-\operatorname{tg} 60° - \cos 30°}{-\cos 30° + \cos 60°} = \frac{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(3 + \sqrt{3})$

6. a) $\sin 105° = \sin 75° \approx 0{,}9659$
b) $\sin 165° = \sin 15° \approx 0{,}2588$
c) $\cos 130° = -\cos 50° \approx$
$\approx -0{,}6428$
d) $\cos 175° = -\cos 5° \approx$
$\approx -0{,}9962$
e) $\operatorname{tg} 142° = -\operatorname{tg} 38° \approx$
$\approx -0{,}7813$
f) $\operatorname{tg} 163° = -\operatorname{tg} 17° \approx$
$\approx -0{,}3057$

7. a) $\sin^2\alpha = \frac{15}{16}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}$
b) $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -2$

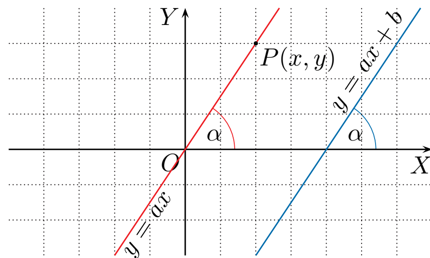
8. a) $\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$
c) $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$
b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$
c) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

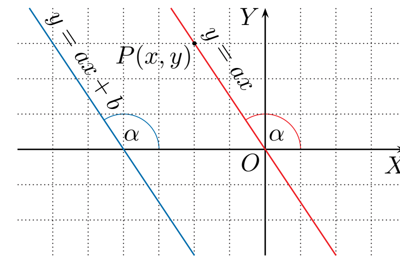
Warto wiedzieć

Współczynnik kierunkowy prostej

$a > 0$



$a < 0$



Niech punkt $P(x, y)$ należy do prostej $y = ax$, gdzie $a \neq 0$, i leży w I lub II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas zgodnie z definicją funkcji tangens:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

Zauważ też, że dla dowolnego współczynnika b prosta $y = ax + b$ tworzy z osią OX taki sam kąt jak prosta $y = ax$. Wynika stąd poniższe twierdzenie.

> Współczynnik kierunkowy a prostej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$, jest równy tangensowi kąta α, jaki ta prosta tworzy z osią OX:
>
> $$a = \operatorname{tg}\alpha$$

1. Wyznacz miarę kąta, który dana prosta tworzy z osią OX.

a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ b) $y = \sqrt{3}x$ c) $y + x = 0$

2. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz miarę kąta między prostymi:

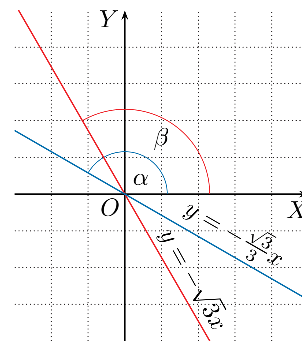
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \text{i} \quad y = -\sqrt{3}x$$

Prosta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ tworzy z osią OX kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 150^\circ$.

Prosta $y = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią OX kąt β taki, że $\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{3}$, czyli $\beta = 120^\circ$.

Kąt między tymi prostymi jest więc równy:

$$\alpha - \beta = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$



Wyznacz miarę kąta między prostymi:

a) $y = -\sqrt{3}x$ i $y = x$, b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ i $y = -x + 2$.

Odpowiedzi do zadań

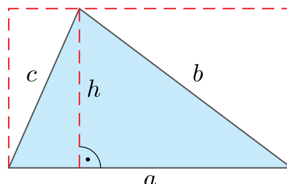
1. a) 30°
b) 60°
c) 135°

2. a) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, czyli $\alpha = 120^\circ$
$\operatorname{tg}\beta = 1$, czyli $\beta = 45^\circ$
$\alpha - \beta = 75^\circ$
b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $\alpha = 30^\circ$
$\operatorname{tg}\beta = -1$, czyli $\beta = 135^\circ$
$\beta - \alpha = 105^\circ$

4.7. Pole trójkąta

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2}ah$$



Ćwiczenie 1

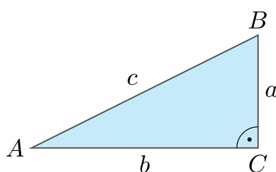
Oblicz pole trójkąta równoramiennego o obwodzie równym 28 cm, jeśli:

a) jego ramię jest o 4 cm krótsze od podstawy,

b) cosinus kąta przy podstawie jest równy $\frac{2}{5}$.

Pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

$$P = \frac{1}{2}ab$$



Ćwiczenie 2

Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 26 cm, jeśli:

a) sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{5}{13}$,

b) tangens jednego z jego kątów ostrych jest równy 2,4,

c) jego kąty ostre α i β spełniają warunek $\sin\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego o polu 4,5 cm^2.

b) Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o obwodzie równym $(30 + 15\sqrt{2})$ cm.

Ćwiczenie 4

D a) Udowodnij podany obok wzór.

b) Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie równym $30\sqrt{3}$ cm.

Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ćwiczenie 5

a) Oblicz pole trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa 4 cm.

b) Oblicz obwód trójkąta równobocznego o polu równym $108\sqrt{3}$ cm^2.

Uczeń:

- podaje różne wzory na pole trójkąta,
- oblicza pole trójkąta, dobierając odpowiedni wzór,
- wykorzystuje umiejętność wyznaczania pól trójkątów do obliczania pól innych wielokątów,
- dowodzi zależności w trójkątach z zastosowaniem trygonometrii,
- wyprowadza wzór: $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
- wykorzystuje poznane wzory na pole trójkąta do rozwiązywania zadań.

Ćwiczenie 1

Niech a oznacza długość podstawy, b – długość ramienia trójkąta. Wówczas $a + 2b = 28$.

a) $a = b + 4$

$a = 12$, $b = 8$

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}$ [cm]

$P = 12\sqrt{7}$ cm^2

b) $\frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{2}{5}$

$a = 8$, $b = 10$

$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}$ [cm]

$P = 8\sqrt{21}$ cm^2

Ćwiczenie 2

a), b) $P = 120$ cm^2

c) $P = \frac{169}{2}\sqrt{3}$ cm^2

Ćwiczenie 3

Niech a oznacza długość ramienia trójkąta. Wówczas:

a) $P = \frac{1}{2} \cdot a^2 = 4{,}5$ cm^2, czyli $a = 3$ cm

$Ob = 2a + a\sqrt{2} = 3(2 + \sqrt{2})$ cm

b) $Ob = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2}) = 15(2 + \sqrt{2})$ cm

$a = 15$ cm

$P = \frac{1}{2} \cdot a^2 = 112{,}5$ cm^2

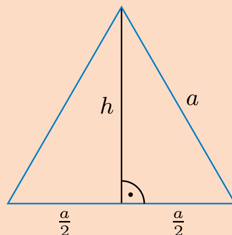
Ćwiczenie 4

a) Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$, czyli $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Zatem pole: $P = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Bok trójkąta jest równy $10\sqrt{3}$ cm, czyli pole: $P = 75\sqrt{3}$ cm^2.



Ćwiczenie 5

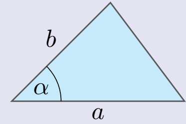
a) $P = \frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^2

b) $Ob = 36\sqrt{3}$ cm

Twierdzenie

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$



Dowód

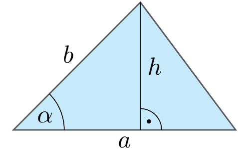
Możliwe są trzy przypadki ze względu na kąt α zawarty między bokami a i b trójkąta. Rozpatrzmy dwa z nich (przypadek trzeci – patrz ćwiczenie 6.).

1° Kąt α jest kątem ostrym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na bok a.

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin\alpha$, więc $h = b\sin\alpha$.

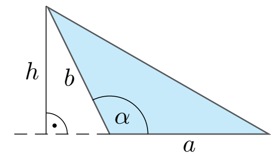
Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.



2° Kąt α jest kątem rozwartym (rysunek obok).

Niech h będzie wysokością opuszczoną na przedłużenie boku a.

Wówczas $\frac{h}{b} = \sin(180° - \alpha)$, więc $h = b\sin(180° - \alpha)$.



Zatem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin(180° - \alpha)$.

Korzystamy ze wzoru $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ i otrzymujemy $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

D Ćwiczenie 6

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ w przypadku, gdy kąt α zawarty między bokami a i b jest kątem prostym.

Ćwiczenie 7

Oblicz pole trójkąta ABC, gdy:

a) $|AB| = 6$, $|BC| = 10$ i $\sphericalangle ABC = 30°$,

b) $|AB| = 10$, $|AC| = 12$ i $\sphericalangle CAB = 120°$,

c) $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|AC| = \sqrt{3}$, $\sphericalangle ABC = 35°$ i $\sphericalangle ACB = 100°$,

d) $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ i $\sphericalangle ABC = 15°$.

Ćwiczenie 8

W trójkącie ABC o polu 12 cm² bok AB ma długość 4 cm. Oblicz długość boku AC, jeśli wiadomo, że kąt CAB ma miarę:

a) $30°$, b) $45°$, c) $120°$.

Ćwiczenie 6

Dla $\alpha = 90°$ mamy $\sin\alpha = 1$, czyli $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}ab$.

Ćwiczenie 7

a) $P = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \sin 30° = 15$

b) $\sin 120° = \sin 60°$
$P = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\sin 60° = 30\sqrt{3}$

c) $\sphericalangle BAC = 180° - 135° = 45°$
$P = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\sin 45° = 3\sqrt{2}$

d) $\sphericalangle BAC = 180° - 2\cdot 15° = 150°$
$\sin 150° = \sin 30°$
$P = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\sin 30° = 4{,}5$

Ćwiczenie 8

a) 12 cm
b) $6\sqrt{2}$ cm
c) $4\sqrt{3}$ cm

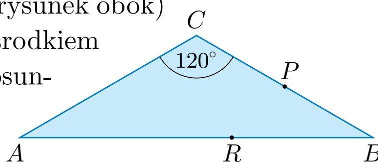
Zadania

1. a) Oblicz pole trójkąta ABC, gdy $|AB| = 7$, $|AC| = 5$ i $\sphericalangle CAB = 120°$.

b) Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramię ma długość 8 cm, a kąt przy podstawie ma miarę $22°30'$.

2. Obwód trójkąta równoramiennego ABC (rysunek obok) jest równy $(12 + 8\sqrt{3})$ cm. Punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R dzieli bok AB w stosunku $3:2$. Oblicz pole trójkąta:

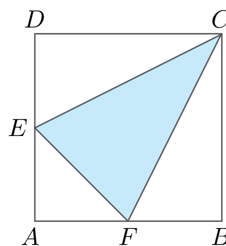
a) APC, b) ARC, c) PRB.



3. a) Podstawa trójkąta równoramiennego jest cztery razy dłuższa od wysokości opuszczonej na tę podstawę. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli wiadomo, że jego pole jest równe 36 cm^2.

b) W trójkącie równoramiennym o polu $12\sqrt{3}$ cm^2 stosunek wysokości opuszczonej na podstawę do długości tej podstawy jest równy $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Oblicz miary kątów tego trójkąta oraz jego obwód.

4. W kwadracie $ABCD$ o boku 8 cm punkty E i F są środkami odpowiednio boków AD i AB (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta EFC oraz jego obwód.



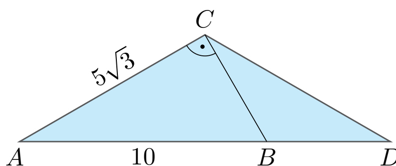
5. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 12 i tworzy z podstawą kąt o mierze 45°.

a) Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną do podstawy.

b) Z wierzchołka tego trójkąta poprowadzono do podstawy odcinek dzielący kąt między ramionami w stosunku $2:1$. Oblicz pola powstałych trójkątów.

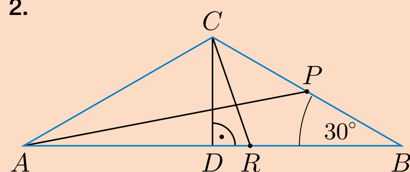
6. Stosunek długości ramienia trójkąta równoramiennego do jego obwodu wynosi 0,3. Pole trójkąta jest równe $8\sqrt{5}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7. Oblicz obwód i pole trójkąta BCD (rysunek obok), jeśli wiadomo, że $|BC| = |BD|$.



8. Rozpatrzmy trójkąty o dwóch danych bokach a i b. Jaka powinna być miara kąta między tymi bokami, aby pole trójkąta było największe?

2.



$|AR| = 3x$, $|RB| = 2x$, $|CD| = h$

Wyznaczamy potrzebne długości:

$|DB| = 2{,}5x = h\sqrt{3}$, czyli $|AB| = 2\sqrt{3}h$

oraz $|AC| = |BC| = 2h$, zatem:

$$2\sqrt{3}h + 4h = 12 + 8\sqrt{3}$$

$$h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$|AC| = |BC| = 4\sqrt{3}$ cm, $|AB| = 12$ cm,

$|AR| = \frac{36}{5}$ cm, $|RB| = \frac{24}{5}$ cm

a) $P_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \sin(180° - 120°) = 12 \sin 60° = 6\sqrt{3}$ [cm^2]

b) $P_{\triangle ARC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{36}{5} \sin 30° = \frac{36}{5}\sqrt{3}$ [cm^2]

c) $P_{\triangle PRB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot 2\sqrt{3} \sin 30° = \frac{12}{5}\sqrt{3}$ [cm^2]

Odpowiedzi do zadań

1. a) $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(180° + - 120°) = \frac{35}{2} \sin 60° = \frac{35\sqrt{3}}{4}$

b) Kąt między ramionami ma miarę:

$180° - 2 \cdot 22°30' = 135°$

Zatem pole:

$P = \frac{1}{2} \cdot 8^2 \sin(180° - 135°) = = 32 \sin 45° = 16\sqrt{2}$ [cm^2]

3. a) $6(2\sqrt{2} + \sqrt{10})$ cm

b) 30°, 30°, 120°,

$Ob = 4(2\sqrt{3} + 3)$ cm

4. $P = 24$ cm^2,

$Ob = 4(\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ cm

5. a) $6\sqrt{2}$

b) $P_1 = 36(\sqrt{3} - 1)$,

$P_2 = 36(3 - \sqrt{3})$

6. Niech a oznacza długość podstawy, b – długość ramienia trójkąta. Wówczas:

$\frac{b}{a+2b} = \frac{3}{10}$, czyli $b = \frac{3}{4}a$

$h = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$

$P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a = 8\sqrt{5}$,

czyli $a = 8$, $b = 6$

7. $|BD| = |BC| = = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2} = 5$

Trójkąt ABC jest trójkątem o kątach 30°, 60°, 90°, gdzie $\sphericalangle BAC = 30°$ i $\sphericalangle ABC = 60°$.

Stąd:

$\sphericalangle CBD = 180° - 60° = 120°$

oraz $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = 30°$.

Zauważmy, że $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = 30°$, czyli trójkąt ADC jest równoramienny, zatem $|CD| = 5\sqrt{3}$.

Obwód trójkąta BCD:

$Ob = 5(2 + \sqrt{3})$

Pole trójkąta BCD:

$P = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \sin 120° = \frac{25}{4}\sqrt{3}$

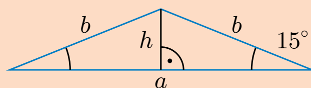
8. $P = \frac{1}{2}ab \sin\alpha$

Największa wartość $\sin\alpha = 1$ jest osiągnięta dla kąta $\alpha = 90°$.

9. a) 6, tak
b) $4\sqrt{6}$, nie
c) 12, tak
d) $3\sqrt{15}$, nie
e) 36, tak
f) 42, tak

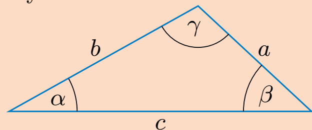
10. $\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2x\cdot \sin 120^\circ = x^2 \sin 60^\circ = $
$= \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 2\cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

11. Niech b będzie długością ramienia. Kąt między ramionami jest równy 150°.



Obliczamy pole trójkąta na dwa sposoby:
$P = \frac{1}{2}b^2 \sin(180^\circ - 150^\circ) =$
$= \frac{1}{2}b^2 \sin 30^\circ = \frac{b^2}{4}$
$P = \frac{1}{2}ah$
Zatem $b^2 = 2ah$, czyli:
$b = \sqrt{2ah}$

12. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas:
$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, czyli $b = \frac{2P}{a\sin\gamma}$
$P = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, czyli $c = \frac{2P}{a\sin\beta}$
$= \frac{2Pb\sin\alpha}{2P\sin\beta} = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} =$
$= \frac{2P\sin\alpha}{a\sin\gamma\sin\beta}$
$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{a\sin\gamma}\cdot\frac{2P}{a\sin\beta} = \frac{2P^2\sin\alpha}{a^2\sin\gamma\sin\beta}$
Stąd $a^2 = \frac{2P\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta}$,
czyli $a = \sqrt{\frac{2P\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$,
co należało wykazać.

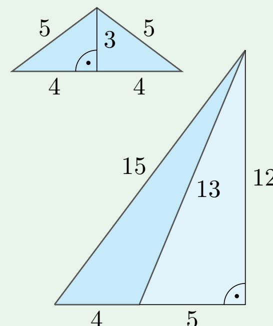
Czy wiesz, że…

Jeżeli dane są długości boków a, b, c trójkąta, to można obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru Herona (Heron z Aleksandrii, I wiek n.e.):

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ jest połową obwodu trójkąta.

Trójkątami Herona nazywamy trójkąty, których długości boków oraz pole wyrażają się liczbami naturalnymi.



Przykładem trójkąta Herona jest trójkąt o bokach 5, 5, 8 (który powstał przez złączenie dwóch trójkątów prostokątnych o bokach 3, 4, 5) oraz trójkąt o bokach 4, 13, 15 (który powstał przez odcięcie z trójkąta prostokątnego o bokach 9, 12, 15 trójkąta prostokątnego o bokach 5, 12, 13).

9. Oblicz pole trójkąta o podanych bokach, korzystając ze wzoru Herona. Czy trójkąt ten jest trójkątem Herona?

a) 3, 4, 5
b) 4, 5, 7
c) 5, 5, 6
d) 4, 6, 8
e) 9, 10, 17
f) 7, 15, 20

D **10.** Dany jest trójkąt, w którym kąt między bokami o długościach x i $2x$ ma miarę 120°. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest dwukrotnie większe od pola trójkąta równobocznego o boku długości x.

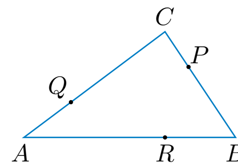
D **11.** Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie równej a i kącie przy podstawie 15°. Uzasadnij, że jeśli wysokość opuszczona na podstawę jest równa h, to ramię tego trójkąta ma długość $\sqrt{2ah}$.

D **12.** Miary kątów trójkąta wynoszą odpowiednio: α, β, γ, a jego pole jest równe P. Wykaż, że:

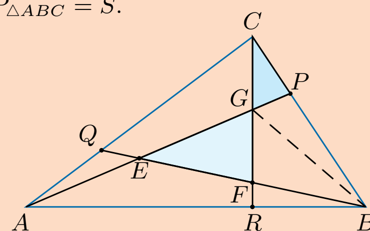
$$a = \sqrt{\frac{2P\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

gdzie a jest długością boku leżącego naprzeciw kąta α.

* **13.** Pole trójkąta ABC jest równe 21 (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta, którego boki są zawarte w prostych: AP, BQ i CR, jeśli $|RB| = \frac{1}{3}|AB|$, $|PC| = \frac{1}{3}|BC|$ oraz $|QA| = \frac{1}{3}|CA|$.



13. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Niech $P_{\triangle ABC} = S$.



Trójkąty ARC i RCB mają wspólną wysokość oraz $|AR| = 2|RB|$. Zatem $P_{\triangle ARC} = 2P_{\triangle RCB}$, skąd $P_{\triangle RCB} = \frac{1}{3}S$.
Analogicznie $P_{\triangle AQB} = P_{\triangle APC} = \frac{1}{3}S$.
Niech $x = P_{\triangle PCG}$. Wówczas $P_{\triangle BPG} = 2x$.
$P_{\triangle ARG} = 2P_{\triangle RBG} = 2(\frac{1}{3}S - 3x) = \frac{2}{3}S - 6x$
$P_{\triangle ARG} = P_{\triangle ARC} - (P_{\triangle APC} - P_{\triangle PCG}) =$
$= \frac{2}{3}S - (\frac{1}{3}S - x) = \frac{1}{3}S + x$
Zatem $\frac{2}{3}S - 6x = \frac{1}{3}S + x$, czyli $x = \frac{1}{21}S$.
Analogicznie $P_{\triangle RFB} = P_{\triangle AEQ} = x$.
Zatem $P_{\triangle EFG} = S - \frac{1}{3}S - (\frac{1}{3}S - x) - (\frac{1}{3}S - 2x) = 3x = \frac{1}{7}S = 3$.

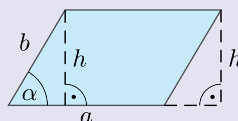
4.8. Pole czworokąta

Aby obliczyć pole dowolnego czworokąta, możemy podzielić go na dwa trójkąty, a następnie obliczyć pola tych trójkątów i je dodać. Do obliczania pól szczególnych czworokątów, takich jak równoległobok, romb i trapez, możemy stosować odpowiednie wzory.

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Ćwiczenie 1

Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 10 cm, a jego kąt ostry ma miarę 60°. Oblicz wysokości tego równoległoboku i jego pole.

D **Ćwiczenie 2**

Udowodnij podany obok wzór.

Pole równoległoboku o bokach a i b oraz kącie ostrym α wyraża się wzorem $P = ab \sin\alpha$.

Ćwiczenie 3

Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 8 i 12, a kąt:

a) ostry ma miarę 45°, b) rozwarty jest pięć razy większy od kąta ostrego.

Ćwiczenie 4

D a) Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

b) Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne mają długości 5 cm i 10 cm oraz przecinają się pod kątem 30°.

Rombem nazywamy czworokąt mający wszystkie boki równe.

Aby obliczyć pole rombu, możemy zastosować wzór na pole równoległoboku lub skorzystać z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

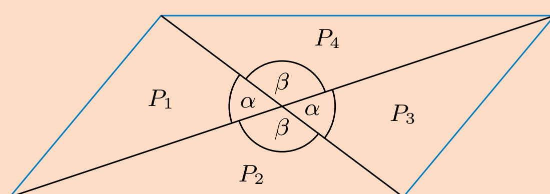
D **Ćwiczenie 5**

Udowodnij podany obok wzór.

Pole rombu o przekątnych długości d_1, d_2 wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}d_1 d_2$.

Ćwiczenie 4

a) Oznaczmy przekątne równoległoboku przez c i d.



$\beta = 180^\circ - \alpha$

$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin\alpha = P_3$

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin(180^\circ - (180^\circ + -\alpha)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin\alpha = P_4$

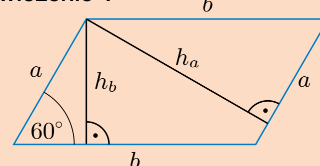
Zatem $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$.

b) $P = 4(\frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 5 \sin 30^\circ) = 12{,}5\ [\text{cm}^2]$

Uczeń:

- rozróżnia czworokąty oraz zna ich własności,
- podaje wzory na pola: równoległoboku, rombu, trapezu,
- oblicza pola czworokątów,
- wykorzystuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania związków miarowych w czworokątach,
- uzasadnia związki miarowe w czworokątach.

Ćwiczenie 1



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, wówczas:

$h_a = b \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$ cm

$h_b = a \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ cm

Pole $P = ah_a = 30\sqrt{3}$ cm^2

Ćwiczenie 2

$\frac{h}{b} = \sin\alpha$, zatem $h = b\sin\alpha$, czyli pole $P = ah = ab\sin\alpha$.

Ćwiczenie 3

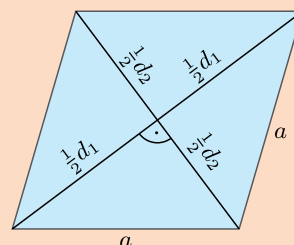
a) $P = 8 \cdot 12 \cdot \sin 45^\circ = 48\sqrt{2}$

b) Kąt ostry α spełnia warunek $180^\circ - \alpha = 5\alpha$, czyli $\alpha = 30^\circ$.

$P = 8 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 48$

Ćwiczenie 5

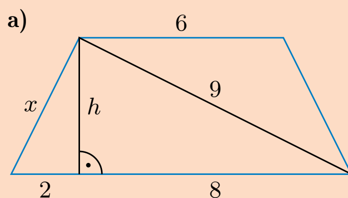
Korzystamy z tego, że przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.



$P = 4(\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}d_1) \cdot (\frac{1}{2}d_2)) = \frac{d_1 d_2}{2}$

Ćwiczenie 7

a)



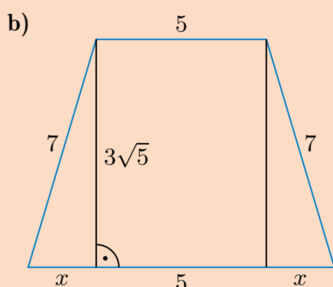
$h = \sqrt{9^2 - 8^2} = \sqrt{17}$

$P = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot \sqrt{17} = 8\sqrt{17}$

$x = \sqrt{2^2 + (\sqrt{17})^2} = \sqrt{21}$

$Ob = 2(8 + \sqrt{21})$

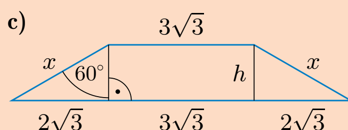
b)



$x = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2} = 2$

$P = 21\sqrt{5}$, $Ob = 28$

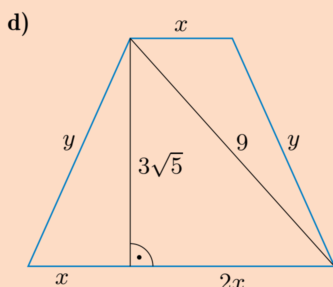
c)



$h = 2$, $x = 4$

$P = 10\sqrt{3}$, $Ob = 2(5\sqrt{3} + 4)$

d)



$2x = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{5})^2} = 6$,
czyli $x = 3$

$y = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{6}$

$P = 18\sqrt{5}$, $Ob = 6(\sqrt{6} + 2)$

Przykład 1

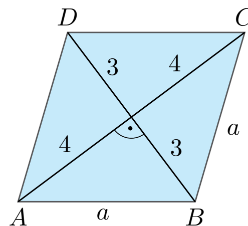
Ile jest równa wysokość rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm?

Długość boku rombu obliczamy z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 = 3^2 + 4^2$, czyli $a = 5$ cm.

Pole rombu: $P = \frac{1}{2}d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ [cm²].

Ale jednocześnie $P = ah$, czyli $h = \frac{P}{a}$, zatem:

$$h = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ [cm]}$$



Ćwiczenie 6

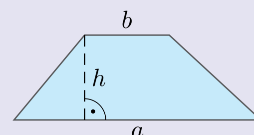
Oblicz pole i wysokość rombu o boku:

a) 13 cm i dłuższej przekątnej równej 24 cm,

b) 6 cm i kącie ostrym α takim, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

> Pole trapezu o podstawach długości a, b i wysokości h wyraża się wzorem:
>
> $$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

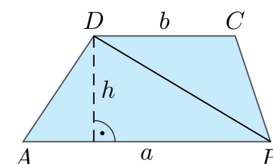


Uzasadnienie wzoru na pole trapezu

Pole trapezu $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BCD. Trójkąty te mają taką samą wysokość h, a ich pola są równe:

$$P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bh$$

Zatem pole trapezu $P = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$.



Ćwiczenie 7

Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, jeśli wiadomo, że:

a) jego podstawy mają długości 10 i 6, a przekątna ma długość 9,

b) jego ramię ma długość 7, krótsza podstawa 5, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$,

c) jego krótsza podstawa ma długość $3\sqrt{3}$, dłuższa podstawa $7\sqrt{3}$, a miara kąta rozwartego wynosi 150°,

d) jedna z jego podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, przekątna ma długość 9, a wysokość jest równa $3\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 6

a) Krótsza przekątna ma długość 10 cm.

$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$ [cm²]

$h = \frac{P}{a} = \frac{120}{13}$ cm

b) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$P = 6 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 24\sqrt{2}$ [cm²]

$h = a\sin\alpha = 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$ [cm]

Zadania

1. a) Oblicz pole równoległoboku, w którym kąt rozwarty ma miarę 150°, a boki mają długości 4 cm i 9 cm.

b) Pole równoległoboku wynosi 8 cm^2, a jego obwód 24 cm. Oblicz wysokości tego równoległoboku, jeśli sinus jego kąta ostrego jest równy 0,25.

D **2.** a) Wykaż, że jeśli przekątne równoległoboku o długościach p i q przecinają się pod kątem α, to pole równoległoboku wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}pq\sin\alpha$$

b) Przekątne równoległoboku o długościach 6 cm i 10 cm tworzą z jednym z boków odpowiednio kąty 12° i 33°. Oblicz pole tego równoległoboku.

3. Przekątne równoległoboku o polu równym $16\sqrt{2}$ cm^2 przecinają się pod kątem, którego sinus wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest trzykrotnie dłuższa od drugiej.

D a) Uzasadnij, że krótsze boki tego równoległoboku są prostopadłe do jednej z jego przekątnych.

b) Oblicz obwód tego równoległoboku.

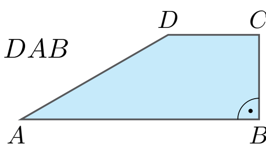
4. a) Przekątne rombu mają długości 12 cm i 16 cm, a jego kąt ostry ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha$.

b) Pole rombu o obwodzie równym 48 cm wynosi 108 cm^2. Oblicz wysokość tego rombu.

5. W prostokącie o przekątnej długości 12 cm połączono odcinkami środki sąsiednich boków. Otrzymany romb ma pole równe $12\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego tego rombu.

6. W trapezie prostokątnym o polu 90 cm^2 i kącie ostrym 45° dłuższa przekątna tworzy z podstawami kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trapezu.

7. W trapezie prostokątnym (rysunek obok) sinus kąta DAB jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, a boki AD i AB mają odpowiednio długości 10 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.



8. a) Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego kąt ostry ma miarę 30°, a podstawy mają długości 4 cm i 10 cm.

b) Trapez równoramienny o podstawach długości 2 cm i 4 cm ma pole równe 18 cm^2. Oblicz sinus kąta, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.

2. a) W ćwiczeniu 4a) uzasadniliśmy, że:

$P_{\triangle AOD} = P_{\triangle BOC} = P_{\triangle DOC} = P_{\triangle AOB}$

zatem:

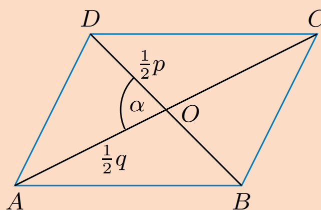
$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}q\sin\alpha = \frac{1}{2}pq\sin\alpha$

b) Kąt ostry między przekątnymi ma miarę:

$12^\circ + 33^\circ = 45^\circ$

zatem:

$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10\sin 45^\circ = 15\sqrt{2}$ [cm^2]

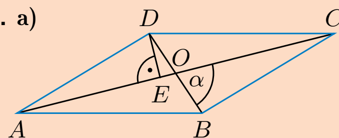


Odpowiedzi do zadań

1. a) 18 cm^2

b) 1 cm, 2 cm

3. a)



Z założeń zadania:

$|DB| = x,\ |AC| = 3x$

gdzie $x > 0$, zatem:

$P = \frac{1}{2}x \cdot 3x \cdot \sin\alpha =$

$= x^2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

czyli $x = 4$ cm. Wówczas:

$\frac{|DE|}{2} = \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

zatem: $|DE| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm

$|EO| = \sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$

$= \frac{2}{3}$ [cm]

czyli $|AE| = 5\frac{1}{3}$ cm.

Obliczamy bok równoległoboku: $|AD|^2 = \left(5\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$.

Stąd $|AD| = 4\sqrt{2}$ cm.

Zauważmy, że:

$|AD|^2 + |DO|^2 =$

$= \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 = 36 = |AO|^2$

zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt ADO jest prostokątny, czyli:

$\sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz

$\sphericalangle DBC = 90^\circ$ (jako kąt naprzemianległy z kątem ADB).

b) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

4. a) 0,96 **b)** 9 cm

5. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$

6. $6(6 + \sqrt{2})$ cm

7. $\frac{320}{9}\sqrt{5}$ cm^2

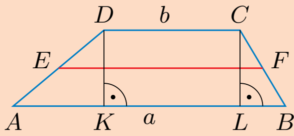
8. a) $7\sqrt{3}$ cm^2 **b)** 0,8

9. a) $P = P_{\triangle ACD} + P_{\triangle ACB} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d_2 \cdot d_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d_2 \cdot d_1 =$
$= \frac{1}{2}d_1 d_2$.

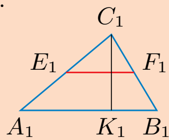
b) 21

10. 161 m siatki, $P_1 = 188\ \text{m}^2$, $P_2 = 512\ \text{m}^2$

12. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Po „usunięciu" prostokąta $KLCD$ otrzymujemy trójkąt, którego bok A_1B_1 ma długość $a - b$.



Trójkąt $E_1F_1C_1$ jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$ (cecha BKB) w skali 1:2, zatem:
$|E_1F_1| = \frac{1}{2}|A_1B_1| = \frac{1}{2}(a - b)$
Stąd:
$|EF| = \frac{1}{2}(a - b) + b = \frac{a+b}{2}$

13. $a = 12{,}5$ cm, $P = 24\ \text{cm}^2$

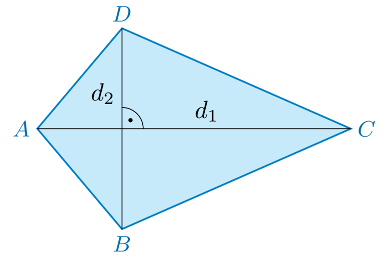
14. $24\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

15. Kąty: 60°, 120°
Ramiona: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$
Podstawy: $\frac{2}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$ $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$

16. $10\sqrt{34} \approx 58{,}3$ [m]

Komentarz
Warto zwrócić uwagę uczniów na zadanie 11 i rozwiązać je na dwa sposoby. Drugi sposób został przedstawiony w klasie 1 (zad. 14a, str. 273, zad. 13, str. 278).

D **9.** a) Na rysunku obok przedstawiono deltoid o przekątnych d_1 i d_2. Uzasadnij, że jego pole wyraża się wzorem:
$$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$$
b) Krótsza przekątna deltoidu o bokach $3\sqrt{2}$ i 5 ma długość 6. Oblicz pole tego deltoidu.



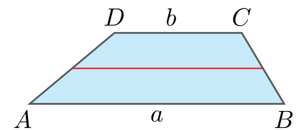
10. Działkę budowlaną w kształcie trapezu o bokach długości: 50 m, 25 m, 20 m i 25 m podzielono linią równoległą do podstaw tak, że obwody każdej z nowo powstałych działek są równe. Ile metrów bieżących siatki potrzeba do ogrodzenia obu działek (siatka między działkami jest wspólna), jeżeli będą one miały furtki o szerokości 1,5 m? Oblicz pola powierzchni tych działek.

11. Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E.

D a) Wykaż, że pole trójkąta AED jest równe polu trójkąta BEC.
b) Oblicz pole trapezu, jeśli wiadomo, że $|AB| = 12$, $|CD| = 3$, a pole trójkąta BEC jest równe $\frac{24}{5}$.

D * c) Pole trójkąta ABE jest równe S_1, a pole trójkąta DEC jest równe S_2. Wykaż, że pole trapezu $ABCD$ jest równe $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}$.

D **12.** Udowodnij, że odcinek łączący środki ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rysunek obok) ma długość $\frac{a+b}{2}$.



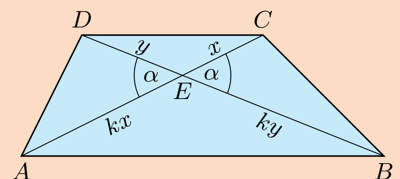
13. Ramiona trapezu mają długości 3 cm i 4 cm, krótsza podstawa ma długość 7,5 cm, a odcinek łączący środki ramion – 10 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu i jego pole.

* **14.** Ramiona trapezu mają długości 7 cm i 9 cm. Odcinek łączący środki ramion dzieli trapez na dwie części, których stosunek pól jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole trapezu, jeśli wiadomo, że suma długości jego podstaw wynosi 16 cm.

* **15.** Przekątne trapezu równoramiennego o polu S zawierają się w dwusiecznych jego kątów ostrych. Jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz miary kątów i długości boków tego trapezu.

16. Działkę budowlaną w kształcie trapezu równoramiennego o bokach długości: 50 m, 20 m, 50 m, 80 m podzielono na dwie części o równych polach powierzchni płotem równoległym do podstaw trapezu. Jaka jest długość płotu rozdzielającego te części?

11. a) Zauważmy, że $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECD$ i $\sphericalangle EBA = \sphericalangle EDC$ (kąty naprzemianległe) oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC$ (kąty wierzchołkowe). Na mocy cechy KKK $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, ich skalę podobieństwa oznaczmy przez k.
Wówczas $P_{AED} = \frac{1}{2}kx \cdot y \cdot \sin\alpha$
oraz $P_{BCE} = \frac{1}{2}ky \cdot x \cdot \sin\alpha$.
Zatem $P_{AED} = P_{BCE}$.



b) $P = 30$

c) $\frac{S_1}{S_2} = k^2$, czyli $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} = k$, stąd $\sqrt{S_1S_2} = kS_2$
$S_2 = \frac{1}{2}xy\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}xy\sin\alpha$
$P_{AED} = P_{BCE} = \frac{1}{2}kxy\sin\alpha = kS_2 = \sqrt{S_1S_2}$
Pole trapezu $ABCD$:
$P = P_{ABE} + P_{DEC} + P_{AED} + P_{BCE} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2}$

4.9. Zagadnienia uzupełniające

Dowody twierdzenia Pitagorasa

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa. Autorem pierwszego z przedstawionych poniżej dowodów jest 20. prezydent Stanów Zjednoczonych James Abram Garfield [czyt. dżejms abram garfild] (1831–1881).

Dowód 1

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Rysujemy trapez prostokątny $ABDE$ o podstawach a i b oraz wysokości $a+b$ (rysunek obok). Kąt ACE jest kątem prostym (uzasadnij). Pole P trapezu jest sumą pól trójkątów ABC, CDE i ACE:

$$P = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

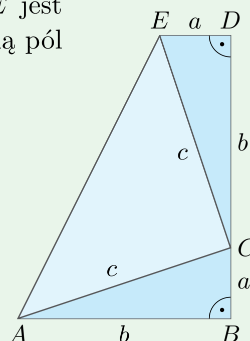
Korzystamy teraz ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2}(a+b)(a+b)$$

i otrzymujemy równość:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



Uzasadnienie

Na mocy cechy BBB $\triangle ABC \equiv \triangle CDE$, stąd $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCE = \alpha$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CED = \beta$, ponadto $\alpha + \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\sphericalangle ACE =$
$= 180^\circ - \sphericalangle DCE - \sphericalangle ACB =$
$= 180^\circ - \alpha - \beta =$
$= 180^\circ - (\alpha + \beta) =$
$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Dowód 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c. Rysujemy kwadrat o boku $a+b$ i wewnątrz niego kwadrat o boku c (rysunek poniżej).

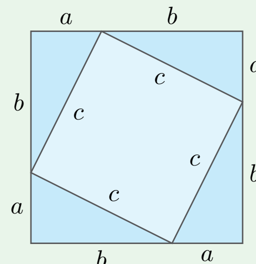
Duży kwadrat ma bok równy $a+b$, więc jego pole:

$$P = (a+b)^2$$

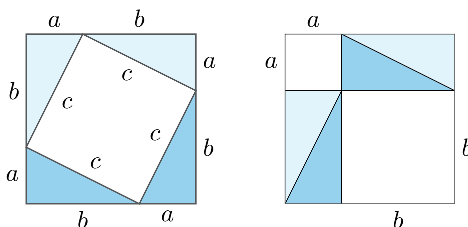
Pole dużego kwadratu jest równe sumie pola małego kwadratu i pól czterech trójkątów:

$$P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b$$

Zatem $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.



D **1.** Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, korzystając z przedstawionych obok rysunków.

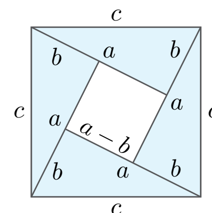


Odpowiedzi do zadań

1. Oba rysunki przedstawiają kwadrat o boku długości $a + b$.
Obliczamy pole tego kwadratu:
z pierwszego rysunku: $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$,
z drugiego rysunku: $a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$.
Zatem $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$, czyli $c^2 = a^2 + b^2$.

D **2.** a) Udowodnij twierdzenie Pitagorasa, wyznaczając pole dużego kwadratu przedstawionego na rysunku obok.

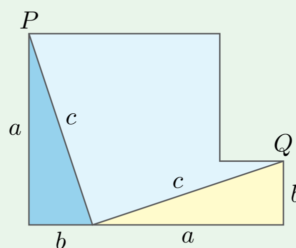
b) Przyjmij, że bok dużego kwadratu ma długość 8, a bok małego – długość 2. Oblicz długości przyprostokątnych a i b.



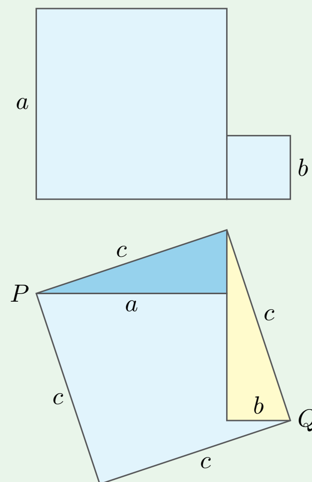
Dowód 3

Rozpatrzmy dwa kwadraty o bokach a i b położone jak na rysunku obok. Suma ich pól jest równa $a^2 + b^2$.

Trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c są przystające (rysunek poniżej).



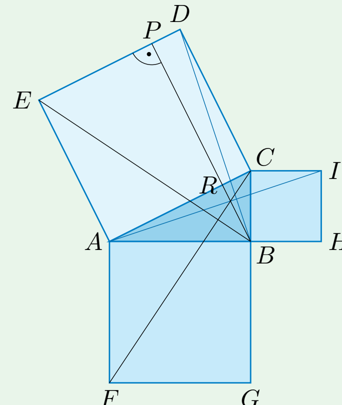
Niebieski trójkąt obracamy wokół punktu P, a żółty – wokół punktu Q, aż otrzymamy kwadrat o boku c.
Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.



Twierdzenie Pitagorasa można sformułować następująco:
Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na jego przyprostokątnych.

Szkic dowodu 4

- Trójkąty FAC i BAE są przystające.
- Pole trójkąta FAC jest równe połowie pola kwadratu $AFGB$.
- Pole trójkąta BAE jest równe połowie pola prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $AFGB$ jest równe polu prostokąta $AEPR$.
- Pole kwadratu $CBHI$ jest równe polu prostokąta $DCRP$.



Przedstawione powyżej rozumowanie pochodzi z I księgi „Elementów" Euklidesa.

D **3.** Podaj uzasadnienia kolejnych etapów szkicu dowodu 4.

2. a) Niech P_T, P_K – pola odpowiednio trójkąta i małego kwadratu.
Pole dużego kwadratu:

$$P = c^2$$

$$P = 4P_T + P_K =$$
$$= 4 \cdot \tfrac{1}{2}ab + (a-b)^2 =$$
$$= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 =$$
$$= a^2 + b^2$$

Zatem $a^2 + b^2 = c^2$.

b) Z założeń zadania:
$c = 8$, czyli $c^2 = a^2 + b^2 = 64$.
Ponadto $a - b = 2$.

$$\begin{cases} (2+b)^2 + b^2 = 64 \\ a = 2 + b \end{cases}$$

$$b^2 + 2b - 30 = 0$$

$$\Delta = 124,\ \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{31}$$

$$b = \tfrac{-2-2\sqrt{31}}{2} < 0$$

lub $b = \frac{-2+2\sqrt{31}}{2} = \sqrt{31} - 1$

Zatem:
$a = \sqrt{31} + 1$, $b = \sqrt{31} - 1$.

3. ▪ $|FA| = |BA|$ (boki kwadratu $FABG$), $|AC| = |AE|$ (boki kwadratu $AEDC$), $\sphericalangle FAC = 90^\circ + \sphericalangle CAB = \sphericalangle BAE$
Zatem na mocy cechy BKB: $\triangle FAC \equiv \triangle BAE$.

▪ Wysokość trójkąta FAC opuszczona z wierzchołka C jest równa długości boku AB.
$P_{FAC} = \frac{1}{2}|FA| \cdot |AB| = \frac{1}{2}P_{AFGB}$

▪ Wysokość trójkąta BAE opuszczona z wierzchołka B jest równa długości boku EP.
$P_{BAE} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |EP| = \frac{1}{2}P_{AEPR}$

▪ $\triangle FAC \equiv \triangle BAE$, czyli $P_{FAC} = P_{BAE}$, zatem $P_{AFGB} = P_{AEPR}$.

▪ Analogicznie $\triangle ICA \equiv \triangle BCD$, $P_{ICA} = \frac{1}{2}P_{CBHI}$ oraz $P_{BCD} = \frac{1}{2}P_{DCRP}$, czyli $P_{CBHI} = P_{DCRP}$.

Odcinki w trapezie

Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b. Odcinek łączący ramiona tego trapezu, równoległy do jego podstaw oraz przechodzący przez punkt przecięcia jego przekątnych, ma długość równą średniej harmonicznej długości podstaw: $\frac{2ab}{a+b}$.

Szkic dowodu

Trójkąty ABP i CDP są podobne, więc $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$.

Z podobieństwa trójkątów GDP i ADB:

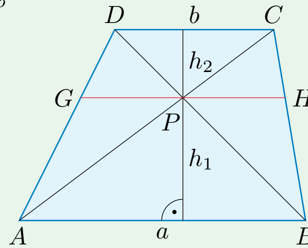
$$\frac{a}{|GP|} = \frac{h_1+h_2}{h_2} = \frac{h_1}{h_2} + 1 = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

Stąd $|GP| = \frac{ab}{a+b}$.

$\triangle PHC \sim \triangle ABC$, zatem analogicznie:

$\frac{a}{|PH|} = \frac{a+b}{b}$, czyli $|PH| = \frac{ab}{a+b}$.

Stąd $|GH| = |GP| + |PH| = \frac{2ab}{a+b}$.



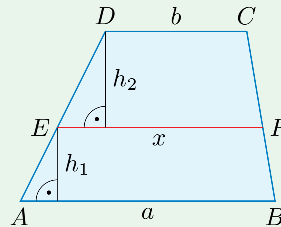
Twierdzenie

Dany jest trapez o podstawach a i b. Odcinek równoległy do podstaw tego trapezu, dzielący go na dwa trapezy o równych polach, ma długość równą średniej kwadratowej długości podstaw trapezu: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Szkic dowodu

Pole trapezu $ABCD$: $P = \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2)$.

Odcinek EF jest równoległy do podstaw trapezu $ABCD$ i dzieli go na dwa trapezy o równych polach, zatem: $\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = \frac{P}{2}$, więc $h_1 = \frac{P}{a+x}$ oraz $\frac{b+x}{2} \cdot h_2 = \frac{P}{2}$, więc $h_2 = \frac{P}{b+x}$.



Stąd otrzymujemy:

$$P = \frac{a+b}{2}\left(\frac{P}{a+x} + \frac{P}{b+x}\right) \quad / \cdot \frac{2(a+x)(b+x)}{P}$$

$$2(a+x)(b+x) = (a+b)(b+x+a+x)$$

Z ostatniego równania wyznaczamy $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

D **4.** Uzupełnij powyższe szkice dowodów o niezbędne uzasadnienia.

4. $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ na mocy cechy KKK:
$\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ (kąty wierzchołkowe),
$\sphericalangle ABP = \sphericalangle CDP$ oraz $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DCP$ (kąty naprzemianległe)

$\triangle GDP \sim \triangle ADB$ na mocy cechy KKK:
$\sphericalangle ADB = \sphericalangle GDP$ (ten sam kąt),
$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DGP$ oraz $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DPG$ (kąty odpowiadające)

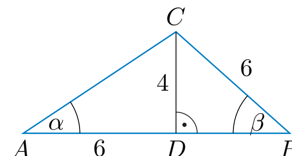
$\triangle PHC \sim \triangle ABC$ na mocy cechy KKK:
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle PCH$ (ten sam kąt),
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CPH$ oraz $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CHP$ (kąty odpowiadające)

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Przekątna prostokąta ma długość 10, a obwód każdego z trójkątów powstałych przez podział prostokąta przekątną jest równy 24. Oblicz pole prostokąta.

2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β trójkąta ABC (rysunek obok).



3. a) Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 60, a tangens jednego z jego kątów ostrych wynosi 2,4. Oblicz długości boków tego trójkąta.

b) Pole trójkąta prostokątnego jest równe $4\sqrt{2}$, a sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

c) Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 16. Wiadomo, że dla jego kątów ostrych α i β zachodzi równość $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{8}$. Oblicz pole tego trójkąta.

4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta ABC.

a) $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,2)$ c) $A(-6,1)$, $B(6,-4)$, $C(6,1)$

b) $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$ d) $A(-1,-5)$, $B(4,5)$, $C(-4,1)$

5. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli wiadomo, że:

a) $\sin\alpha = 0{,}1$, c) $\cos\alpha = \frac{1}{6}$, e) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$, g) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$,

b) $\cos\alpha = 0{,}9$, d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, f) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, h) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{11}{5}$.

**6.** Rozwiąż trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB, jeśli:

a) $\sphericalangle ACB = 40^\circ$, a wysokość CD trójkąta ma 6 cm,

b) jego obwód jest równy 34 cm, a wysokość CD ma 13 cm,

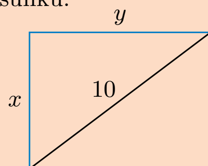
c) jego pole jest równe 12 cm^2, a $\sphericalangle CAB = 40^\circ$.

**7.** a) Na płaskim terenie stoi 70-metrowa wieża. Obserwator widzi jej wierzchołek pod kątem 12° do poziomu. Jaka jest odległość obserwatora od podstawy wieży? Pomiń wzrost obserwatora.

b) Linę podtrzymującą maszt przymocowano do niego na wysokości 110 m nad ziemią i zakotwiczono w ziemi w odległości 40 m od podstawy masztu. Oblicz miarę kąta, jaki lina tworzy z poziomem.

Odpowiedzi do zadań

1. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



I sposób

$\begin{cases} x + y = 14 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$

czyli $x = 6$, $y = 8$.
Zatem pole $P = 48$.

II sposób

$P = xy = \frac{1}{2}(x+y)^2 + -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$P = \frac{1}{2}(14^2 - 10^2) = 48$

2. $|AC| = 2\sqrt{13}$, $|BD| = 2\sqrt{5}$
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$,
$\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$,
$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. a) 10, 24, 26
b) $4(\sqrt{2}+2)$
c) $16\sqrt{7}$

4. a) $\sin\beta = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\beta = \sin\gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2}{3}$,
$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{2}$
b) $\sin\alpha = \cos\gamma = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\alpha = \sin\gamma = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{2}{3}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{2}$
c) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{5}{13}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{12}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{12}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{12}{5}$
d) $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$,
$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$,
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$,
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$

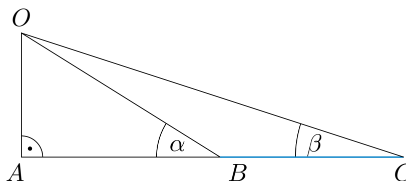
5. a) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{33}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3\sqrt{11}$
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{19}}{9}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9\sqrt{19}}{19}$
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{35}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{35}}{35}$
d) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$
e) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$
f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
g) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$
h) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{146}}{146}$, $\cos\alpha = \frac{11\sqrt{146}}{146}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{11}$

6. a) $\alpha = \beta = 70^\circ$,
$a = b \approx 6{,}39$ cm, $c \approx 4{,}37$ cm
b) $a = b = \frac{229}{17}$ cm, $c = \frac{120}{17}$ cm,
$\alpha = \beta \approx 75^\circ$, $\gamma \approx 30^\circ$
c) $a = b \approx 4{,}94$ cm, $c \approx 7{,}56$ cm,
$\beta = 40^\circ$, $\gamma = 100^\circ$

7. a) około 329,26 m
b) około 70°



8. Z punktu obserwacyjnego O znajdującego się na wysokości 4,5 m nad ziemią widać brzegi rzeki pod kątami $\alpha = 32°$ i $\beta = 18°$ (rysunek obok). Oblicz szerokość rzeki w tym miejscu.





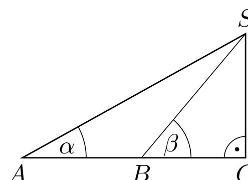
9. Turysta idzie prostą drogą wznoszącą się pod kątem 5°.

a) Jaką różnicę poziomów pokona po przejściu 0,5 km?

b) Jak długo musiałby iść tą drogą z prędkością 4,5 km/h, aby pokonać różnicę poziomów równą 130 m?



10. Z punktów A i B odległych od siebie o 800 m widać szczyt góry S pod kątami $\alpha = 29°$ i $\beta = 50°$ (rysunek obok). Oblicz wysokość SC tej góry.



Zestaw II

1. W trójkącie ABC kąt ACB ma miarę 75°, bok AC ma długość $4\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

2. Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie 30°. Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.



3. Przeczytaj informację w ramce, a następnie rozwiąż zadanie.

> Punkt w trójkącie, dla którego suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza, nosi nazwę **punktu Fermata** (punktu Torricellego). Można wykazać, że:
>
> • jeśli któryś z kątów trójkąta ma miarę 120° lub większą, to punktem Fermata jest wierzchołek tego kąta;
>
> • jeśli wszystkie kąty trójkąta mają miary mniejsze od 120°, to punkt Fermata leży wewnątrz trójkąta i każdy z boków trójkąta widać z tego punktu pod kątem 120°.

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o przeciwprostokątnej długości 2. Niech punkt P będzie takim punktem tego trójkąta, że suma jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza. Wykaż, że suma ta jest równa $1 + \sqrt{3}$.

8. $|BC| = |AC| - |AB| =$
$= \frac{4,5}{\text{tg}\, 18°} - \frac{4,5}{\text{tg}\, 32°} \approx 6,65$ [m]

9. a) $x = 500 \sin 5° \approx 43,6$ [m]

b) $\frac{0,13}{s} = \sin 5°$
$s \approx 1,49$ [km]
$t = \frac{s}{v} \approx \frac{1,49}{4,5} \approx 0,33$ [h],
czyli około 20 minut

10. $\frac{|SC|}{|BC|} = \text{tg}\, 50°$,
stąd $|BC| = \frac{|SC|}{\text{tg}\, 50°}$
$\frac{|SC|}{800+|BC|} = \text{tg}\, 29°$,
stąd $|SC| =$
$= 800\, \text{tg}\, 29° + \frac{|SC|\, \text{tg}\, 29°}{\text{tg}\, 50°}$
$|SC| = \frac{800\, \text{tg}\, 29°\, \text{tg}\, 50°}{\text{tg}\, 50° - \text{tg}\, 29°} \approx$
≈ 829 [m]

Zestaw II

1.

C, 4√3, 6, A, D, B

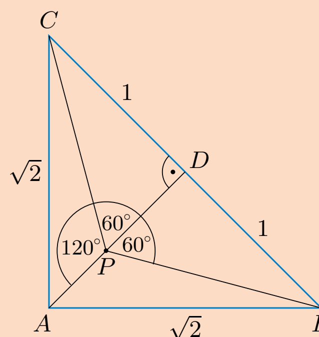
$|AD| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} =$
$= 2\sqrt{3}$ [cm]

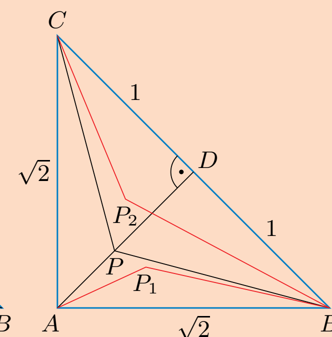
$\triangle ADC$ jest trójkątem 30°, 60°, 90° o kącie 30° w wierzchołku C, co oznacza, że $\triangle BDC$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Stąd $|DB| = 6$ cm.

Zatem:
$P = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 6) \cdot 6 =$
$= 6(\sqrt{3} + 3)$ [cm²]

2. 6 cm, $6\sqrt{3}$ cm, $6\sqrt{3}$ cm

3. Niech $P \in AD$ będzie położony tak, że $\sphericalangle BPC = 120°$.
Wówczas $\sphericalangle BPA = 120°$ oraz $\sphericalangle CPA = 120°$.
Rozpatrzmy punkt P_1 leżący wewnątrz trójkąta ABP:
$\sphericalangle ABP_1 < \sphericalangle ABP$ oraz $\sphericalangle BAP_1 < \sphericalangle BAP$,
więc $\sphericalangle BP_1A > 120°$.
Analogicznie dla punktu P_2.
Trójkąty BPD i CPD są przystające
i mają miary 30°, 60°, 90°.
$\text{ctg}\, 60° = \frac{|PD|}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $|PD| = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$|BP| = |CP| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$|AP| = 1 - |PD| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
Zatem $|AP| + |BP| + |CP| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3}$, co należało wykazać.



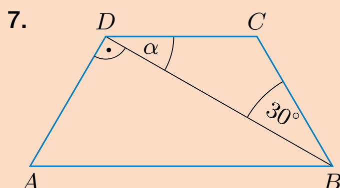


4. a) $Ob = 2(11 + 3\sqrt{3})$ cm,
$d_1 = 4\sqrt{7}$ cm, $d_2 = 2\sqrt{43}$ cm
b) $Ob = 4(8 + \sqrt{3})$ cm,
$d_1 = 2\sqrt{29}$ cm,
$d_2 = 2\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$ cm

5. $\sin \sphericalangle PAD = \frac{\sqrt{10}}{10}$,
$\cos \sphericalangle PAD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
$\operatorname{tg} \sphericalangle PAD = \frac{1}{3}$,
$\operatorname{ctg} \sphericalangle PAD = 3$

6. $21(3 - \sqrt{3})$

7.



Przyjmijmy: $\sphericalangle CDB = \alpha$, wówczas $\sphericalangle DBA = \alpha$ oraz $\sphericalangle DAB = 30^\circ + \alpha$, czyli $\alpha = 30^\circ$.
Stąd:
$|AD| = |BC| = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
$|AB| = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm
Trójkąt DBC jest równoramienny, czyli:
$|DC| = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm
Zatem $Ob = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm.

8. a) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{4}$
b) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$,
$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{4}$
c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{2}$
d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,
$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{3}$

9. a) $\frac{1}{6}\cos\alpha = \frac{1}{4}$,
$\cos\alpha = \frac{3}{2} \geqslant 1$ – sprzeczność
b) $\sin\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}-5}{5} =$
$= \sqrt{5} - 1 \geqslant 1$ – sprzeczność
c) $\cos\alpha = \frac{6-\sqrt{3}}{3} =$
$= 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \geqslant 1$ – sprzeczność

10. a) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ **b)** 0 **c)** $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ **e)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** 1
g) $3 - \sqrt{3}$ **h)** $-\frac{8}{3}$

4. Dany jest trapez prostokątny o kącie ostrym α, dłuższej podstawie a, krótszej podstawie b i wysokości h. Oblicz obwód i długości przekątnych tego trapezu, jeśli:
a) $\alpha = 60^\circ$, $a = 8$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm, b) $\alpha = 30^\circ$, $b = 10$ cm, $h = 4$ cm.

5. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie P. Podstawy trapezu mają długości: $|AB| = 12$ cm i $|CD| = 4$ cm. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta PAD.

6. Podstawy trapezu mają długości 10 i 4, a jego ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty 45° i 60°. Oblicz pole tego trapezu.

***7.** W trapezie równoramiennym przekątna o długości 10 cm tworzy z jednym z ramion kąt 90°, a z drugim – kąt 30°. Oblicz obwód tego trapezu.

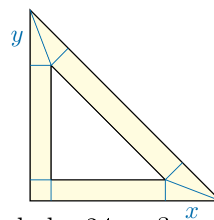
8. Narysuj w układzie współrzędnych kąt α, do którego ramienia końcowego należy punkt P. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.
a) $P(1, 4)$ b) $P(-1, 4)$ c) $P(-3, 2)$ d) $P(-2, 3)$

D **9.** Uzasadnij, że nie istnieje kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ spełniający podane równanie.
a) $\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cos\alpha$ b) $\sqrt{5}\sin\alpha = 5 - \sqrt{5}$ c) $3\cos\alpha + \sqrt{3} = 6$

10. Oblicz.
a) $\sin 30^\circ(\cos 0^\circ - 2\cos 135^\circ)$
b) $(\cos 30^\circ + \cos 150^\circ) \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$
c) $\dfrac{\sin 150^\circ - 2\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} - \operatorname{tg} 135^\circ$
d) $\dfrac{\sin 45^\circ + \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \cos 180^\circ$
e) $\cos 135^\circ \cdot \sin 90^\circ - \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$
f) $\sin 15^\circ \cdot (\operatorname{tg} 135^\circ + 1) + \cos^2 0^\circ$
g) $\dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 150^\circ} + \sin^2 180^\circ$
h) $\dfrac{\operatorname{tg} 120^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ}{\sin 60^\circ} : \sin 90^\circ$

D **11.** Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje wartość 1.
a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$
c) $\sin 20^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 20^\circ$
d) $\sin^2 26^\circ + \sin 64^\circ \cdot \cos 26^\circ$
Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

***12.** Ekierki mające kształt połowy kwadratu o boku 20 cm są produkowane z drewnianych listew o szerokości 2 cm i grubości 2 mm. Jaka jest objętość drewna zużytego do wyprodukowania 1000 takich ekierek? Pomijamy objętość odpadów. Jaka byłaby objętość drewna zużytego do wyprodukowania z takich samych listew 1000 ekierek mających kształt połowy trójkąta równobocznego o boku 24 cm?



11. a) $\sin^2 37^\circ + \sin^2(90^\circ - 37^\circ) = \sin^2 37^\circ + \cos^2 37^\circ = 1$
b) $\sin^2 18^\circ + \sin^2(90^\circ - 18^\circ) = \sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1$
c) $\sin 20^\circ \cdot \cos(90^\circ - 20^\circ) + \cos^2 20^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$
d) $\sin^2 26^\circ + \sin(90^\circ - 26^\circ) \cdot \cos 26^\circ = \sin^2 26^\circ + \cos^2 26^\circ = 1$

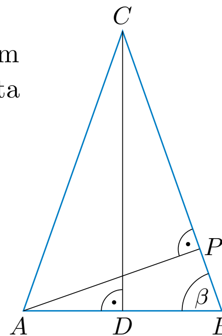
12. 1° Pole podstawy ekierki:
$P = \frac{1}{2} \cdot 20^2 - \frac{1}{2}(20 - 2 - 2 - 2\sqrt{2})^2 = 68 + 32\sqrt{2} \approx 113{,}255$ [cm^2]
Objętość 1000 ekierek: $V = 1000 \cdot P \cdot 0{,}2 \approx 22\,651$ [cm^3]

2° $x = 2\sqrt{3}$, $y = \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ}$
Pole podstawy ekierki:
$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} - \frac{1}{2}(12 - 2 - 2\sqrt{3})(12\sqrt{3} - 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} 15^\circ}) \approx 87{,}717$ [cm^2]
Objętość 1000 ekierek: $V = 1000 \cdot P \cdot 0{,}2 \approx 17\,543$ [cm^3]



Przykład

Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie długości 4 cm i ramionach długości 6 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na jego ramię.



Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

I sposób

Możemy skorzystać z podobieństwa trójkątów APB i CDB (cecha podobieństwa KKK): $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|CB|}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ [cm], zatem:

$$|AP| = \frac{|AB| \cdot |CD|}{|CB|} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ [cm]}$$

II sposób

Kąt β jest kątem ostrym trójkąta CDB:

$$\cos\beta = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zatem $\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kąt β jest również kątem ostrym trójkąta ABP, więc:

$\sin\beta = \frac{|AP|}{|AB|}$, stąd $|AP| = |AB| \cdot \sin\beta = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ [cm].

III sposób

Obliczamy wysokość CD trójkąta ABC: $|CD| = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ [cm].

Pole trójkąta ABC zapisujemy na dwa sposoby:

$$P = \tfrac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ [cm}^2\text{]}$$
$$P = \tfrac{1}{2}|BC| \cdot |AP| = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot |AP| = 3|AP| \text{ [cm}^2\text{]}$$

Porównujemy wyznaczone wyrażenia i otrzymujemy:

$$3|AP| = 8\sqrt{2}, \text{ stąd } |AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

IV sposób

Oznaczmy $|PB| = x$, wówczas $|PC| = 6 - x$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów APB oraz APC i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} |AP|^2 = 4^2 - x^2 \\ |AP|^2 = 6^2 - (6 - x)^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy: $x = \frac{4}{3}$ cm i $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Odpowiedź: $|AP| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm



Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość c, może mieć pole równe:

A. $\frac{1}{4}c^2$, **B.** $\frac{1}{3}c^2$, **C.** $\frac{1}{2}c^2$, **D.** c^2.

2. Dany jest trapez równoramienny, którego ramiona są tej samej długości co krótsza podstawa, a dłuższa podstawa jest dwa razy dłuższa od krótszej. Przekątne tego trapezu przecinają się pod kątem:

A. 90°, **B.** 60°, **C.** 45°, **D.** 30°.

3. Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, to $\cos\alpha$ jest równy:

A. $\frac{4}{5}$, **B.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$, **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, **D.** $\frac{1}{4}$.

4. Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, to α należy do przedziału:

A. $(0^\circ; 30^\circ)$, **B.** $(30^\circ; 45^\circ)$, **C.** $(45^\circ; 60^\circ)$, **D.** $(60^\circ; 90^\circ)$.

5. Jeżeli przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 50 cm, a sinus jednego z jego kątów ostrych jest równy $\frac{24}{25}$, to:

A. pole tego trójkąta jest równe 300 cm^2,
B. obwód tego trójkąta jest równy 112 cm,
C. cosinus jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{1}{25}$,
D. tangens jednego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy $\frac{25}{24}$.

6. Dla $\alpha = 60^\circ$ prawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2} = \operatorname{tg} 30^\circ$,
B. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$,
C. $\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$,
D. $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

7. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ$
B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ$
C. $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 30^\circ$
D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{tg} 45^\circ$

8. Wskaż wyrażenie, którego wartość jest równa 1.

A. $\sin 61^\circ + \cos 151^\circ$
B. $\sin 151^\circ - \cos 61^\circ$
C. $\sin 151^\circ \cdot \cos 61^\circ$
D. $\sin 151^\circ : \cos 61^\circ$

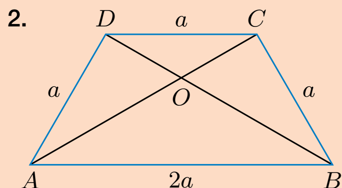
9. Wartość wyrażenia $(\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ) \cdot \frac{\operatorname{tg} 120^\circ}{\cos 150^\circ}$ jest liczbą przeciwną do liczby:

A. -1, **B.** 1, **C.** $\sqrt{3}$, **D.** $-\sqrt{3}$.

---

1. Trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości $\frac{c\sqrt{2}}{2}$.

2.



Zauważmy, że:

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA = 60^\circ$

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 120^\circ$

Trójkąt DCB jest równoramienny, czyli:

$\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = 30^\circ$

Zatem $\sphericalangle DBA = 30^\circ$ i analogicznie $\sphericalangle CAB = 30^\circ$, czyli $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ oraz $\sphericalangle COB = 60^\circ$.

6. **A.** $\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2} = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq \operatorname{tg} 30^\circ$

B. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \neq 1$

C. $\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

D. $2\sin\alpha + \cos\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \neq \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

7. **A.** $\sin 40^\circ - \cos 50^\circ = \sin 40^\circ - \sin 40^\circ = 0 \neq 1$

B. $\sin 29^\circ + \cos 61^\circ = \sin 29^\circ + \sin 29^\circ = 2\sin 29^\circ \neq 2\sin 30^\circ = 1$

C. $2\sin^2 30^\circ - 2\cos^2 30^\circ = 2((\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2) = -1 \neq 1$

D. $\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{tg} 45^\circ = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{4} = 1$

8. **A.** $\sin(90^\circ - 29^\circ) + \cos(180^\circ - 29^\circ) = \cos 29^\circ - \cos 29^\circ = 0 \neq 1$

B. $\sin(180^\circ - 29^\circ) - \cos(90^\circ - 29^\circ) = \sin 29^\circ - \sin 29^\circ = 0 \neq 1$

C. $\sin(180^\circ - 29^\circ) \cdot \cos(90^\circ - 29^\circ) = \sin^2 29^\circ \neq 1$

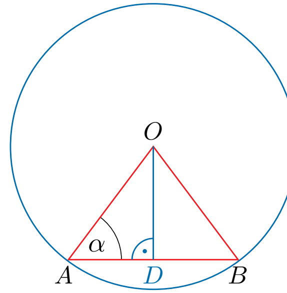
D. $\sin(180^\circ - 29^\circ) : \cos(90^\circ - 29^\circ) = \frac{\sin 29^\circ}{\sin 29^\circ} = 1$

9. $(\sin(180^\circ - 30^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ)) \cdot \frac{\operatorname{tg}(180^\circ-60^\circ)}{\cos(180^\circ-30^\circ)} = (\sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ) \cdot \frac{-\operatorname{tg} 60^\circ}{-\cos 30^\circ} = -1$



Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$ oraz kątach ostrych α i β. Oblicz $\sin\alpha \cdot \sin\beta$.



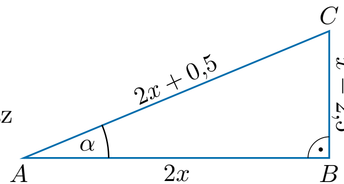
Zadanie 2 (2 pkt)
Dany jest okrąg o środku O i promieniu 6 (rysunek obok). Oblicz długość cięciwy AB, jeśli $\sin\alpha = 0{,}8$.

Zadanie 3 (2 pkt)
Punkt P jest spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C. Oblicz długości odcinków AP i BP, jeśli $|BC| = 6$ i $|AB| = |AC| = 8$.

Zadanie 4 (2 pkt)
Oblicz cosinus kąta rozwartego, jeśli kwadrat odwrotności sinusa tego kąta jest równy 5.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

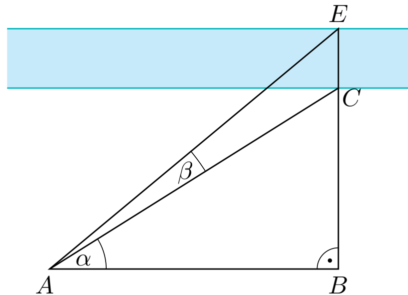
Zadanie 5 (4 pkt)
Oblicz obwód trójkąta ABC (rysunek obok) oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.



Zadanie 6 (4 pkt)
Długości boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych α i β są kolejnymi liczbami parzystymi. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha + \sin\beta)^2$.

Zadanie 7 (4 pkt)
Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i $(7 + 3\sqrt{3})$ cm oraz wysokości 3 cm. Jego kąty ostre przylegają do dłuższej podstawy, a jeden z nich ma miarę równą 45°. Oblicz iloczyn cosinusów kątów rozwartych tego trapezu.

Zadanie 8 (4 pkt)
Aby obliczyć szerokość rzeki (długość odcinka CE na rysunku obok), dokonano pomiarów w terenie: $\alpha = 32°$, $\beta = 8°$, $|AC| = 120$ m. Oblicz szerokość rzeki.



Odpowiedzi do zadań

1. Długość przeciwprostokątnej: $c = \sqrt{10}$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$

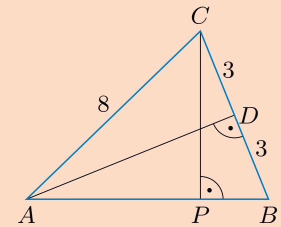
2. $\sin\alpha = \frac{|OD|}{|AO|}$, czyli:

$|OD| = 0{,}8 \cdot 6 = 4{,}8$

$|AD| = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6$

$|AB| = 2|AD| = 7{,}2$

3.



$|AD| = \sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{55} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot|PC|$, czyli $|PC| = \frac{3\sqrt{55}}{4}$

$|BP| = \sqrt{6^2 - \left(\frac{3\sqrt{55}}{4}\right)^2} = 2{,}25$

$|AP| = 5{,}75$

4. $\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 = 5$, czyli $\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ i $\alpha \in (90°; 180°)$, stąd $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. $(2x + 0{,}5)^2 = (x - 2{,}5)^2 + (2x)^2$ i $x > 2{,}5$

$x^2 - 7x + 6 = 0$ i $x > 2{,}5$, czyli $x = 6$

$Ob = 5x - 2 = 28$,

$\sin\alpha = \frac{3{,}5}{12{,}5} = \frac{7}{25}$,

$\cos\alpha = \frac{12}{12{,}5} = \frac{24}{25}$,

$\text{tg}\,\alpha = \frac{3{,}5}{12} = \frac{7}{24}$,

$\text{ctg}\,\alpha = \frac{24}{7}$

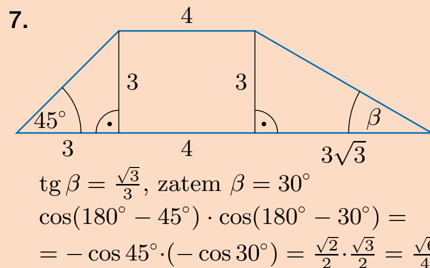
6. Długości boków: $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie $n > 0$

$(2n)^2 + (2n+2)^2 = (2n+4)^2$, gdzie $n > 0$

Stąd $n = 3$ oraz długości boków trójkąta: 6, 8, 10

$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$

7.



$\text{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, zatem $\beta = 30°$

$\cos(180° - 45°) \cdot \cos(180° - 30°) = -\cos 45° \cdot (-\cos 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

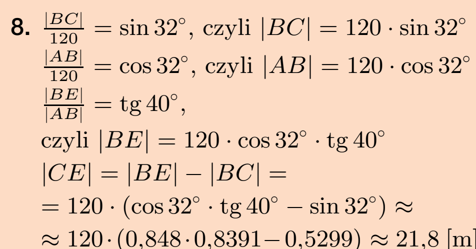
8. $\frac{|BC|}{120} = \sin 32°$, czyli $|BC| = 120 \cdot \sin 32°$

$\frac{|AB|}{120} = \cos 32°$, czyli $|AB| = 120 \cdot \cos 32°$

$\frac{|BE|}{|AB|} = \text{tg}\,40°$,

czyli $|BE| = 120 \cdot \cos 32° \cdot \text{tg}\,40°$

$|CE| = |BE| - |BC| = 120 \cdot (\cos 32° \cdot \text{tg}\,40° - \sin 32°) \approx 120 \cdot (0{,}848 \cdot 0{,}8391 - 0{,}5299) \approx 21{,}8$ [m]





W zadaniach 1–3 odpowiedź ma postać trzycyfrowego kodu.

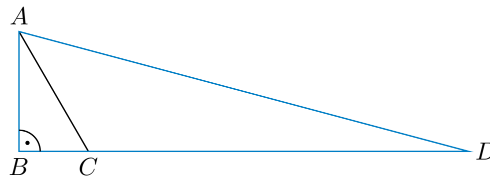
Zadanie 1 (2 pkt)
Kąty α i β spełniają warunki: $\alpha < \beta$ i $\alpha + \beta = 180^\circ$. Oblicz wartość wyrażenia $1 + \cos\beta$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 2 (2 pkt)
Współrzędne punktu $P(x, y)$, który leży na ramieniu końcowym kąta α, spełniają warunki: $x^2 - 6x + 9 = 0$, $4y^2 - 4y + 1 = 0$. Oblicz $\sin\alpha$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3 (2 pkt)
Oblicz $\sin 22^\circ 30'$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Zadanie 4 (4 pkt)
Dany jest trapez $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |DA| = 5$, $|AB| = 11$, punkt M jest środkiem boku AD, a P – punktem przecięcia prostych CM i AB. Oblicz pole i obwód trójkąta APM.

Zadanie 5 (5 pkt)
Kąt BAC ma miarę 30°, a kąt CAD – miarę 45° (rysunek poniżej).



a) Oblicz pole trójkąta ABD, jeśli $|AB| = 6$.

D b) Wykaż, że $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, i oblicz $\cos 15^\circ$.

D **Zadanie 6 (4 pkt)**
Pole rombu jest równe P, a kąt ostry ma miarę 30°. Wykaż, że suma długości przekątnych tego rombu jest równa $2\sqrt{3P}$.

Zadanie 7 (5 pkt)
D a) Wykaż, że długości dwóch dowolnych boków trójkąta są odwrotnie proporcjonalne do wysokości opuszczonych na te boki.

b) Oblicz wysokości trójkąta o bokach długości: 4, 5 i 7.

Odpowiedzi do zadań

1. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$
$1 + \cos\beta = 1 + \cos(180^\circ - \alpha) = 1 - \cos\alpha = 1 - \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}0318$
Należy zakodować: 031.

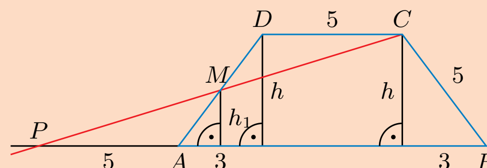
2. $(x-3)^2 = 0$, czyli $x = 3$
$(2y-1)^2 = 0$, czyli $y = \frac{1}{2}$
$r = \sqrt{3^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$
$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{37}}{2}} = \frac{\sqrt{37}}{37} \approx 0{,}1644$
Należy zakodować: 164.

3. $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{\sin 22^\circ 30'}{\cos 22^\circ 30'} = \frac{\sin 22^\circ 30'}{\sqrt{1 - \sin^2 22^\circ 30'}} = \sqrt{2} - 1$
$\sin 22^\circ 30' = (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 22^\circ 30'}$
$\sin^2 22^\circ 30' = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot (1 - \sin^2 22^\circ 30')$
$\sin^2 22^\circ 30' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$
$\sin 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}3827$
Należy zakodować: 382.

5. a) $18(2 + \sqrt{3})$
b) $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

6. Niech a oznacza długość boku rombu, a d_1, d_2 oznaczają długości przekątnych.
$P = a^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$, czyli $a^2 = 2P$
$P = \frac{1}{2}d_1 d_2$, czyli $d_1 d_2 = 2P$
$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = a^2 / \cdot 4$
$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 = 8P$
$(d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 = 8P + 4P = 12P$
Zatem $d_1 + d_2 = 2\sqrt{3P}$.

7. a) Niech a, b, oznaczają długości boków trójkąta, h_a, h_b, – wysokości opuszczone na te boki.
$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$, czyli $ah_a = bh_b = 2P$
Iloczyn boku i wysokości opuszczonej na ten bok jest dla danego trójkąta stały, zatem wielkości te są odwrotnie proporcjonalne.
b) Ze wzoru Herona $P = 4\sqrt{6}$
$P = \frac{1}{2} \cdot 4h_a = 4\sqrt{6}$, czyli $h_a = 2\sqrt{6}$
$5h_b = 4 \cdot 2\sqrt{6}$, czyli $h_b = \frac{8\sqrt{6}}{5}$
$7h_c = 4 \cdot 2\sqrt{6}$, czyli $h_c = \frac{8\sqrt{6}}{7}$

4.


Z warunków zadania $|AM| = |MD| = 2{,}5$.
$\sphericalangle PMA = \sphericalangle CMD$ jako kąty wierzchołkowe oraz $\sphericalangle PAM = \sphericalangle CDM$ jako kąty naprzemianległe, zatem na mocy cechy KBK trójkąty PAM i CDM są przystające, czyli $|PA| = |DC| = 5$.
Wysokość trapezu $h = 4$, zatem $|PC| = \sqrt{185}$ oraz $|PM| = |MC| = \frac{1}{2}\sqrt{185}$.
Obliczamy wysokość h_1: $\frac{h_1}{h} = \frac{|PM|}{|PC|}$, czyli $h_1 = 2$.
Zatem: $Ob_{\triangle APM} = 7{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{185}$, $P_{\triangle APM} = 5$.